



Tanja Jevremov

PRIMENA TEHNIKA VIZUALIZACIJE U NAPREDNOJ STATISTICI



Novi Sad, 2023

Tanja Jevremov

PRIMENA TEHNIKA VIZUALIZACIJE U NAPREDNOJ STATISTICI



Novi Sad, 2023.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FILOZOFSKI FAKULTET

Dr Zorana Đinđića 2

Novi Sad

<http://ff.uns.ac.rs>

Za izdavača

Prof. dr Ivana Živančević Sekeruš

Tanja Jevremov

Primena tehnika vizualizacije u naprednoj statistici

Izrada interaktivnih apleta

Dejan Pajić

Recenzenti

dr Oliver Tošković

dr Aleksandar Tomašević

Lektura i korektura

Ljiljana Ćuk

Tehnička priprema i dizajn korica

Tanja Jevremov

ISBN

978-86-6065-734-5

URL

<https://digitalna.ff.uns.ac.rs/sadrzaj/2023/978-86-6065-734-5>

Sadržaj

Smernice za upotrebu	1
Iz recenzija	2
(I) KARTEZIJE ili KORELACIJA.....	4
1.1 Zurenje u tavanicu.....	4
1.2 Kartezijevi darovi	4
(II) LINIJE ili ANOVA.....	9
2.1 Koliko ima od Toleda do Rima?	9
2.2 Tačka tačka tačkica... ..	10
2.2.1 ... gotova je linijica.....	11
2.2.2 ... horizontalna ili ne... ..	13
2.2.3 ... pitanje interpretacije.....	14
2.3 Statističko testiranje u psihologiji	21
2.3.1 Kvantifikacija variranja	22
2.3.2 Test za rasklapanje varijanse.....	25
2.4 Statističko zaključivanje	27
2.4.1 P za probability	28
2.4.2 F distribucija	28
2.4.3 P sa obe strane ogledala	30
2.4.4 Pogled preko tarabe: drugačiji načini.....	34
2.5 Posle testiranja ili povratak podacima.....	37
2.6 Razigrane linije ili (ne)homogenost varijansi	40
2.7 Linije u društvu ili ANOVA u više smerova	42
2.7.1 Više nezavisnih varijabli	42
2.7.2 Putanje i susretanja.....	46
2.7.3 I, II, III... kako varijansu razlažeš ti?	47
2.7.4 Različite putanje.....	51

(III) VENOVI DIJAGRAMI ili VIŠESTRUKA REGRESIJA	57
3.1 Igra krugovima	57
3.2 Regresiona analiza	58
3.3 Venovi dijagrami u regresionoj analizi	59
3.3.1 Koeficijenti višestruke korelacije i determinacije	60
3.3.2 Parcijalne veze između varijabli	68
3.4 Multikolinearnost ili netolerancija na išlere	73
3.4.1 Neiskorišćena informacija u modelu	75
3.5 Supresija ili neočekivana pomoć	76
(IV) SESTRE PO GENERALNIM LINEARNIM MODELIMA	80
4.1 Površinske razlike	80
4.2 ... i dubinske sličnosti	80
4.3 Linearno i generalno u modelima	83
LITERATURA	84

Smernice za upotrebu

Primena tehnika vizualizacije u naprednoj statistici je zamišljena kao nastavak udžbenika *Primena tehnika vizualizacija u bazičnoj statistici* Dejana Pajića (2020). Glavni junaci ovog udžbenika su statističke tehnike koje analiziraju razlike između većeg broja grupa ili povezanost između većeg broja varijabli – analiza varijanse i višestruka regresiona analiza. Njih prate interaktivne vizualizacije kojima čitalac može pristupiti koristeći sledeće linkove ili QR kodove:

ANALIZA VARIJANSE

[Linija](#)



VIŠESTRUKA REGRESIJA

[Venovi dijagrami](#)



Interaktivne vizualizacije izradio je Dejan Pajić, koristeći Javaskript biblioteke [D3 - Data-Driven Documents](#) koja se distribuira u skladu sa [3-Clause BSD](#) licencom. Autor biblioteke je američki programer i stručnjak za vizualizaciju podataka [Majkl Bostok](#). Algoritame za statističku obradu takođe je kreirao Dejan Pajić. Složeniji postupci obrade podataka obavljaju se uz pomoć besplatne Javascript biblioteke [jStat](#).

Tekst udžbenika napisala je Tanja Jevremov. Prateći tekst, čitalac će biti poveden u avanturu u kojoj je jedan od glavnih učesnika. Susreće se sa pitanjima, vežbama i zadacima, koji su namenjeni kako komunikaciji sa čitaocem, tako i usmeravanju i vođenju čitaoca kroz vizualizacije.

Pitanja su mesta u tekstu gde treba zastati i razmisliti pre nastavka čitanja. Označena su obrnutim znakom pitanja  kao upitne rečenice u španskom jeziku.

Vežbe uglavnom sadrže uputstva za rukovanje interaktivnim vizualizacijama i promene njihovog izgleda i sadržaja.

Zadaci pored menjanja izgleda i sadržaja interaktivnih vizualizacija obično podrazumevaju i zaključivanje o pravilnostima na koje uvedene promene upućuju.

Tanja Jevremov je nacrtala crtež za naslovnu stranu i ilustracije u tekstu.

Iz recenzija

Tekst Tanje Jevremov pod naslovom Primena tehnika vizualizacije u naprednoj statistici predstavlja divan nastavak 400 godina stare tradicije spajanja geometrije i algebre. Tekst se oslanja na originalan pristup objašnjavanju statističkih koncepata i analiza preko vizualizacije podataka. Ovaj aspekt statistike i generalno, analize podataka, je na žalost zanemaren u klasičnim udžbenicima i nastavi statistike. Sa jedne strane deluje da nema ničeg prirodnijeg nego da učimo studente da svoje podatke zamisle, a kao bi drugačije nego vizuelno, slikovno. Koliko znamo i učimo naše studente, vid i vizuelne informacije su nešto što nam je kao vrsti veoma važno. Sa druge strane, ako postoje složeni i neretko apstraktni koncepti poput statističkih, očekivano bi bilo objasniti ih nekome preko informacije koja mu je prirodno značajna i jasna, tj preko vizualizacije. Međutim, ma koliko bilo prirodno i očekivano, takav pristup često izostaje a nastavnici statistike se oslanjaju pretežno na algebru. Kao da smo zaboravili Dekarta i muvu koja leti po 3D koordinatama njegove sobe. Kao da smo negde ispustili „pogled“ na podatke, ideju da svoje podatke zamišljamo i vizualizujemo. Ili smo samo zaboravili da tu ideju prenesemo drugima. Tanja Jevremov nas vraća na tu ideju, na taj put, vraća nas u Dekartovu sobu, tera nas da pratimo muvu i njeno kretanje, ponovo nam spaja geometriju i algebru. Za svaki vizualizovani podatak ona daje jednostavna algebraska rešenja i objašnjenja.

Pored svega toga, stil pisanja je lagan i razigran. Tera nas da zamišljamo razne autore i trenucima rađanja velikih ideja, vraća nas u istoriju, baca pogleda na budućnost i spaja teologiju, verovatnoću, vitraže i pivo. Duhoviti naslovi i podnaslovi, prateće anegdote, uvezane sa razumljivim stilom pisanja su svakako veliki kvalitet ovog udžbenika.

Imajući sve navedeno u vidu, možemo pretpostaviti da će ovakav pristup nastavi statistike učiniti značajan korak ka približavanju ove oblasti studentima, da će im olakšati savladavanje gradiva, razumevanje i primenu statističkih analiza. Ako ništa drugo, zahvaljujući ovom udžbeniku, studenti će duže pamtiti statističke koncepte, a verovatno će ih i sanjati, bar u REM fazi sna i to u boji.

dr Oliver Tošković

Inovativnost ovog udžbenika ogleda se u nekoliko aspekata. Prvi se odnosi na njegove interaktivne komponente i građenje intuicije o logici statističkog zaključivanja putem vizualizacije podataka, ali i samih istraživačkih problema. Vizualizacija u ovom udžbeniku nije samo tehnika ili pomoćno sredstvo, već se u prvom poglavlju čitav referentni okvir za razmišljanje o istraživačkim problemima i primerima smešta u kartezijanski koordinatni sistem, a kasnije se čitaocu predstavljaju sve kompleksniji problemi unutar istog prostora. Pored toga, prvo poglavlje uspostavlja kontinuitet sa prethodnom monografijom (Pajić, 2020) što zajedno naglašava kumulativni karakter predstavljenog materijala.

Drugi aspekt je integrativni i može se naslutiti iz samog sadržaja, gde se čitaoci upoznaju sa statističkim zaključivanjem kroz rešavanje problema, a sami metodi nisu diskretno kategorizovani i "razbacani" u odvojene delove udžbenika. Umesto toga, u udžbeniku se čitaoci kreću kroz (nominalno) različite metode rešavajući probleme vizualizacije unutar ranije pomenutog koordinatnog sistema. Na kraju, aspekt integracije je uobličen u finalnom poglavlju, koji čitaocima otkriva da su dva metoda koja su savladali u prethodnom poglavlju zapravo predstavljaju različite oblike generalnih linearnih modela.

Treća dimenzija inovativnosti odnosi se na problematizaciju određenih aspekata statističkog zaključivanja. Ono što ne bismo očekivali od udžbenika čiji naslov počinje sa "Primena tehnika vizualizacije" jeste da u samom tekstu hrabro vodi čitaoca kroz problematizaciju određenih aspekata statističkog zaključivanja. To nije učinjeno putem fusnote ili kroz izdvojene sekcije na kraju poglavlja već kroz integralne, ključne delove poglavlja (npr. 2.4.3.3 Nulifikacija, 2.4.4.2 Bejz ili promena, 3.4 Multikolinearnost ili netolerancija na išlere) koji povezuju aspekte statističkog zaključivanja sa relevantnim temama iz filozofije nauke, opštoj metodologije ili bejzijanskog pristupa statističkom zaključivanju.

Zahvaljujući interaktivnim elementima, ovaj format udžbenika omogućava da tekst ili njegov glavni sadržaj bude vodič kroz interakciju sa apletima i time se tradicionalna ekspozicija koja zahteva stotine stranica (tekst, tabele, grafikoni) svodi na redukovanu formu gde je primarna uloga teksta da drži pažnju čitaocima dostupnim jezikom koji je zanimljiv i neretko duhovit ("netolerancija na išlere").

Iako sam naziv udžbenika naglašava aspekt vizuelizacije on zapravo nudi puno više od toga. Ovaj udžbenik će, pre svega zbog svoje inovativnosti, značajno doprineti poboljšanju nastave napredne statistike na osnovnim akademskim studijama.

dr Aleksandar Tomašević

(I) KARTEZIJE ili KORELACIJA

1.1 Zurenje u tavanicu

Prva polovina XVII veka. Negde u Francuskoj ili možda u Holandiji. Rene Dekart (fr. René Descartes, 1596–1650) prehladen leži u krevetu i posmatra muvu koja šeta po tavanici. Muva jednostavno postoji i šeta, a on postoji i misli. Misli kako bi mogao da opiše položaj muve u svakom trenutku kretanja. I doseti se! Jedan od uglova tavanice uzeće kao referentnu tačku, a horizontalnu i vertikalnu udaljenost od nje kao koordinate kojima bi položaj muve na tavanici bio u potpunosti opisan. Tako je rođen pravougli koordinatni sistem, sa muvom kao prvim objektom u njemu (Borst & Plett, 2013; van Deventer, 2021). Poznajemo ga i pod imenom Kartezijev koordinatni sistem, po latinskom obliku prezimena ovog francuskog filozofa i matematičara (*des Cartes*).

Ne može se sa sigurnošću reći da li je ova priča o nastanku ideje o koordinatnom sistemu istinita. Poput popularne anegdote o Njutnu, jabuci i teoriji gravitacije, ona je možda proizvod romantičarskog viđenja nauke nastalog skoro vek nakon Dekartove smrti, u kome je vladala zavodljiva predstava o naučniku kao zamišljenom usamljenom geniju čija otkrića neretko prati eureka doživljaj (Holms, 2011).

„Začini“ u pričama o naučnim otkrićima su takođe pogodna sredstva u podučavanju, naročito kada je reč o pojmovima koji su sastavni deo ranog obrazovanja učenika. Koordinatni sistem je to iz najmanje dva razloga. Prvo, predstavljanje objekata u sistemu pravougljih ili druge vrste (kosouglih ili polarnih) koordinata ima višestruku i savremenu primenu – počev od projekcije objekata na mapama u cilju navigacije do slike na ekranu kompjutera (Kuhn, 2003; Soler et al., 2012). Drugo, Dekartova zamisao koordinatnog sistema predstavlja spoj algebre i geometrije, odnosno numeričkih podataka i njihovog vizuelnog prikaza. Mogućnost vizualizacije podataka čini ga nezaobilaznim i u nastavi statistike.

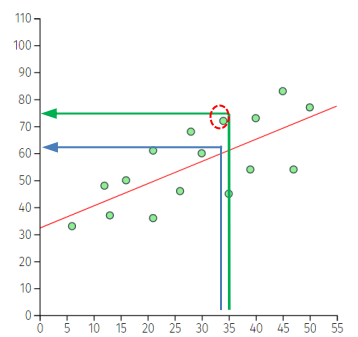
1.2 Kartezijevi darovi

Jedan od darova Kartezijevog pravouglog koordinatnog sistema statistici je mogućnost vizualizacije odnosa između varijabli. Primer takve vizualizacije se u interaktivnom obliku nalazi u udžbeniku [Primena tehnika vizualizacije u bazičnoj statistici](#) (Pajić, 2020), u kom se sa statističkim konceptima možemo upoznati kroz niz apleta.¹ U ovom primeru ose koordinatnog sistema predstavljaju dve kvantitativne varijable – na primer, određenu sposobnost (x-osa) i uspešnost u

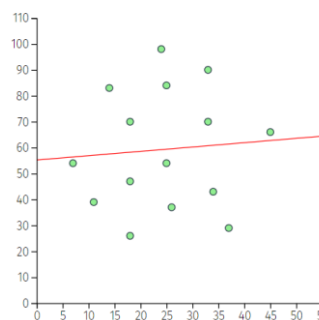
¹ Aplet, mali program pomoću kojeg se mogu izvršiti određeni zadaci na Internetu (engl. *applet*).

određenoj aktivnosti (y-osa), dok bi vrednosti na njima mogli biti skorovi na testovima kojima su sposobnost i uspešnost procenjeni. Ose početno omeđuju prazan prostor koji se može popuniti podacima iz padajućeg menija ili klikom miša unutar sistema. Sa više predstavljenih rezultata na dvema kvantitativnim varijablama, ovakav koordinatni sistem je okvir za vizualizaciju i demonstraciju nekoliko važnih statističkih koncepata koje prevashodno dugujemo Frensisu Galtonu (Sir Francis Galton, 1822–1911) i Karlu Pirsonu (Carl Pearson, 1857–1936), a koji su neizostavni u sadržajima osnovnih statističkih kurseva (Stanton, 2001). To su:

1) *Povezanost između varijabli*. Na jačinu povezanosti upućuje „raspršenost“ objekata u prostoru koji omeđuju koordinate, pa se ovakav koordinatni sistem naziva „dijagram raspršenja“ (engl. *scatter plot*). U apletu se variranjem veličine raspršenosti unetih tačaka može prikazati relativno visoka povezanost (kao na grafiku 1.1a) ili niska povezanost (kao na grafiku 1.1b).



Slika 1.1a. Dijagram raspršenja $r=0,72$



Slika 1.1b. Dijagram raspršenja $r=0,08$

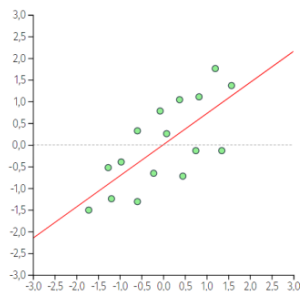
Pogodnost ovakvog grafičkog prikazivanja povezanosti je ta što omogućava interpretaciju koja je u velikoj meri intuitivna. Manja raspršenost na grafiku na slici 1.1a je posledica toga što znatan broj ispitanika ima visoke rezultate i na testu uspešnosti i na testu sposobnosti, i što znatan broj ispitanika ima niske rezultate na oba testa, što oblikuje pravilnost da je posmatrana sposobnost pozitivno povezana sa uspešnošću. Suprotan smer snopa tačaka takođe bi ukazivao na povezanost, ali negativnog smera – visoke rezultate na jednoj varijabli pratili bi niski rezultati na drugoj. Sa druge strane, velika raspršenost tačaka na grafiku na slici 1.1b upućuje da povezanost između sposobnosti i uspešnosti ne postoji, odnosno da isti skor na uspešnosti mogu postići ispitanici sa različito izraženom sposobnošću. Numerički izraz smera i intenziteta povezanosti je Pirsonov produkt-moment koeficijent korelacije, koji u primeru prikazanom na grafiku 1.1a iznosi $r=0,72$, a u primeru na grafiku 1.1b $r=0,08$.

2) *Predviđanje rezultata*. Koordinatni sistem pruža mogućnost i za vizuelno predviđanje rezultata na varijabli za koje pretpostavljamo da zavise od rezultata nekoj drugoj varijabli. Vizuelno predviđanje omogućava dodatak dijagramu raspršenja – linija predviđanja (crvene linije na graficima). Rezultat koji se predviđa je uobičajeno onaj predstavljen na y-osi – u našem primeru to je skor na testu uspešnosti. Do njega od rezultata na x-osi, koji je osnova za predviđanje, vodi

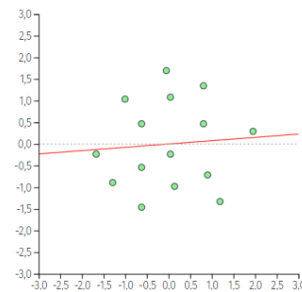
vertikalna ortogonalna projekcija do linije predviđanja, i dalje horizontalna projekcija od linije predviđanja do y-ose. Na grafiku 1.1a to je plava linija koja skor 35 na testu sposobnosti povezuje sa skorom 60 na meri uspešnosti. Najtačnije moguće predviđanje postiže se kada je linija postavljena kao na graficima – tako da prolazi kroz sredinu snopa tačaka, odnosno tako da je, kao i aritmetička sredina, težište rezultata takvo da je zbir njihovih odstupanja od nje 0. U tom položaju su odstupanja tačaka od linije predviđanja najmanja moguća, te su najmanje moguće i vrednosti *reziduala* – razlika između izmerenih i predviđenih vrednosti. Položaj linije predviđanja je u potpunosti određen time koliko visoko je postavljena i koliko je strma, a algebarski izraz tog položaja je:

$$Y' = a + bX$$

– gde od koeficijenta *a* zavisi visina, a od koeficijenta *b* nagib linije. *Visina linije* na graficima je takva da preseca y-osu na mestu gde rezultat na x-osi iznosi 0, tako da se koeficijent *a* može posmatrati kao početna, referentna vrednost kada na nezavisnoj varijabli X „nema signala” – u engleskom jeziku bi je možda dobro opisivao termin *baseline*. No češći engleski naziv za ovu vrednost je *intercept* zbog presecanja y-ose linijom predviđanja. Visina linije i tačka presecanja zavise od merne skale na kojoj su predstavljeni rezultati. Ovo se može uočiti odabirom opcije u apletu kojom se vrednosti na osama standardizuju i ujednačavaju, primenom koje bi prethodno prikazani dijagrami izgledali kao na graficima na slikama 1.2a i 1.2b.



Slika 1.2a. Dijagram raspršenja rezultata na standardizovanim i ujednačenim varijablama
 $r=0,72$



Slika 1.2b. Dijagram raspršenja rezultata na standardizovanim i ujednačenim varijablama
 $r=0,08$

Na prikazanim graficima je sada na x-osama vidljiva vrednost 0, koja je aritmetička sredina standardizovanih rezultata. Sledeći princip vizuelnog predviđanja, njoj odgovara predviđena vrednost 0, koja je ujedno i aritmetička sredina vrednosti na zavisnoj varijabli. Prikazano na ovaj način, postaje očiglednije da se koeficijent *a* može razumeti i kao prosečna očekivana vrednost pri nultim vrednostima nezavisne varijable kada su vrednosti na njoj standardizovane. *Nagib linije* zavisi od povezanosti između varijabli u smeru da višu korelaciju prati veći nagib, što se takođe može jasnije uočiti na dijagramima na kojima su vrednosti standardizovane i ujednačene. Na njima je nagib linije takav da promena vrednosti na y-osi, kada se vrednost na x-osi promeni jednu jedinicu, odgovara koeficijentu korelacije. Viša korelacija omogućava da rezultat na

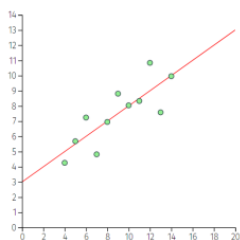
nezavisnoj varijabli ima veću ulogu u predviđanju, te se b koeficijent može razumeti i kao ponder, čija veličina modifikuje uticaj rezultata na nezavisnoj varijabli na zavisnu. Opisane pravilnosti u predviđanju se sažetije mogu izraziti na sledeći način: predviđena vrednost je onoliko veća od nulte, referentne vrednosti (a) za koliko je od nje veća vrednost postignuta na nezavisnoj varijabli X , modifikovana odnosom između varijabli (b).

Uz pomoć linije predviđanja može se opisati i svaki pojedinačni ostvareni rezultat na zavisnoj varijabli Y . Kompozit elemenata, koji opisuju pojedinačni rezultat, na grafiku 1.1a je ilustrovan zelenom linijom koja polazi od rezultata na x -osi i vodi vertikalno do linije predviđanja, a zatim dalje vertikalno do pojedinačnog posmatranog rezultata (uokvirenog crvenim krugom), i odatle horizontalno do vrednosti na y -osi. U prikazanom primeru zelena linija skor 35 na testu sposobnosti povezuje sa skorom 70 na testu uspešnosti. Taj skor je nešto viši u odnosu na predviđeni, koji se obično približava ili *regresira* ka prosečnoj vrednosti na zavisnoj varijabli, usled čega je termin *regresija* ustanovljen u nazivu većeg broja tehnika predviđanja, a *regresiona linija* za liniju predviđanja. Uobičajeno prisutna razlika u opaženim i predviđenim rezultatima na zavisnoj varijabli je posledica toga što ostvareni rezultat nekog ispitanika sadrži manje ili više individualno odstupanje od opisane pravilnosti u predviđanju. On je veći od referentnog (a) za onoliko za koliko je od njega veći ispitanikov rezultat na nezavisnoj varijabli modifikovan odnosom između varijabli (bX), i dodatno za onoliko koliko je njegovo odstupanje od predviđene vrednosti (e za engl. *error*):

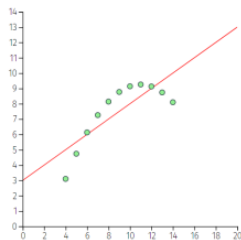
$$Y = a + bX + e$$

Dijagrami otkrivaju i pravilnost da, što je korelacija između varijabli manja, na rezultat na zavisnoj varijabli više utiču individualne varijacije, a manje rezultat na nezavisnoj varijabli.

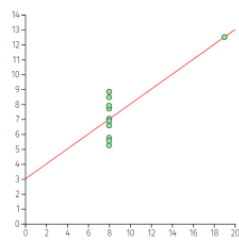
3) *Eksploracija podataka*. Koordinatni sistem nudi i mogućnost za istraživanje karakteristika podataka koje mogu da utiču na rezultate analiza. Na primer, u apletu se odabirom podataka Enskombov kvartet (1), (2), (3) i (4) mogu dobiti grafici koji izgledaju kao na slikama od 1.3a do 1.3d.



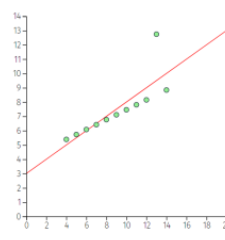
Slika 1.3a. Enskombov kvartet (1)
($r=0,82$)



Slika 1.3b. Enskombov kvartet (2)
($r=0,82$)



Slika 1.3c. Enskombov kvartet (3)
($r=0,82$)



Slika 1.3d. Enskombov kvartet (4)
($r=0,82$)

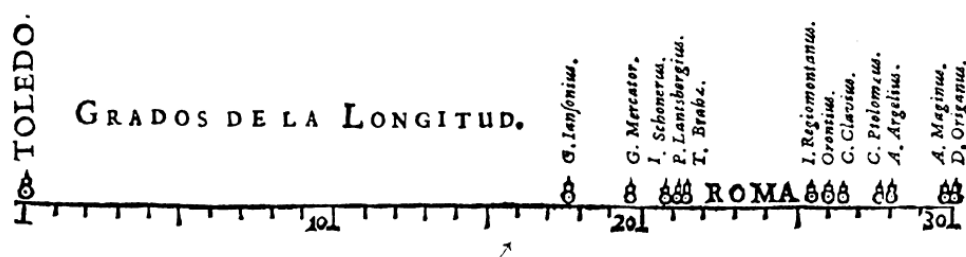
Grafici pokazuju specifičnosti u podacima koje mogu dovesti do prividno jednakih vrednosti koeficijenta korelacije između varijabli čije povezanosti se zapravo razlikuju. To su nelinearan odnos između varijabli (2) i prisustvo aberantnih rezultata (3 i 4) (Anscombe, 1973).

Ovo kratko podsećanje na vizuelno predstavljanje povezanosti, predviđanja i eksploraciju podataka u koordinatnom sistemu odnosilo se na slučajeve kada su posmatrane varijable kvantitativne, i kada ih je dve. No, kako vizuelno predstaviti podatke koji su kategorijalni? I šta ako je u analizu uključeno više od dve varijable?

(II) LINIJE ili ANOVA

2.1 Koliko ima od Toleda do Rima?

Podaci se vizuelno često prikazuju graphicima, na kojima su na koordinatama, odnosno osama, predstavljene vrednosti na varijablama. Tako je i na slici, za koju se smatra da je prvi poznati statistički grafikon, nastao u XVII veku, čiji je autor holandski astronom i kartograf Van Langren (Michael Florent van Langren, 1598–1675) (Friendly, 2008). Taj grafik izgleda ovako:



Slika 2.1. Van Langrenov grafik iz 1644. godine (preuzet iz Friendly et al., 2010)

¿ Deluje pomalo neobično? Po čemu?

Osim očigledne „ručne“ umesto računarske izrade, ovaj grafik je u odnosu na one sa kojima se danas srećemo neuobičajen s obzirom na bar dve karakteristike: 1) pristupu temi kojom se bavi i 2) broju osa odnosno dimenzija koje prikazuje.

Tema grafika odgovara najvažnijim naučnim pitanjima vremena u kojem je nastao – a to su bila pitanja preciznog merenja vremena, rastojanja i položaja u prostoru. Rešenje ovih problema moglo je da obezbedi uspešniju navigaciju, što je imalo veliku praktičnu vrednost u ovoj eri istraživačkih putovanja, otkrića, osvajanja i kolonizacije teritorija. Na Van Langrenovom grafiku predstavljeno je dvanaest različitih procena geografske dužine, odnosno ugaone udaljenosti od meridijana između Toleda i Rima. Grafik ne pokazuje samo tačno rastojanje između ova dva grada (prikazano strelicom), već govori i o pouzdanosti njegove procene – velika varijabilnost procena koje potiču od različitih astronoma ukazuje na nepouzdanost procena i potrebu za preciznijom metodom procene ovog parametra. O tome koliko je u to doba bilo važno da se reši ovaj problem, koji je grafički predstavio Van Langren, svedoče i konkursi u mnogim evropskim zemljama u kojima su ponuđene vredne nagrade za pronalazače tačnijih načina procene geografske dužine (engl. *discoverer of longitude*) (Friendly et al., 2010). Problem preciznosti procene fizičkog rastojanja zadnjih decenija je ponovo dobio na aktuelnosti sa razvojem i upotrebom globalnih navigacionih satelitskih sistema. Međutim, kontekst procene i podaci koji

se koriste su drugačiji. Procena je „iz ruku“ istraživača premeštena u tehničke uređaje, a problem preciznosti u eksperimente variranja različitih tehničkih parametara (npr. Acosta & Toloza, 2012; Kiliszek & Kroszczyński, 2020; Larson et al., 2007).

Broj dimenzija je druga karakteristika po kojoj je Van Langrenov grafik donekle netipičan u odnosu na današnje grafike. On je jednodimenzionalan – ima samo jednu (horizontalnu) osu, na kojoj su unete procenjene vrednosti geografske dužine, zajedno sa imenima istraživača koji su ih dali. Grafici koje danas vidamo najčešće imaju bar dve dimenzije – i kada prikazuju jednu i kada prikazuju više varijabli.

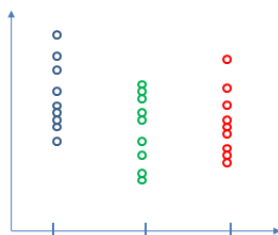
Dve ose imaju grafici koji prikazuju frekvenciju, odnosno učestalost vrednosti na *jednoj* varijabli. Takav grafik je histogram, na kome su na jednoj (najčešće x) osi prikazane vrednosti na varijabli, na drugoj (y-osi) učestalost, dok stubići pokazuju kolika je učestalost pojedinih vrednosti. Pritom, zavisno od toga da li je varijabla kvantitativna ili kategorijalna, na osi na kojoj su prikazane vrednosti na varijabli mogu biti predstavljene ili ekvidistantne vrednosti intervala ili nazivi tj. oznake kategorija.

Dve ose najčešće imaju i grafici koji prikazuju odnos *dve* varijable. Takav grafik je dijagram raspršenja, odnosno skater dijagram (vidi odeljak *Kartezije ili korelacija*), na kome obe ose predstavljaju varijable sa mernim vrednostima. Na ovakvom dijagramu rezultati ispitanika na varijablama predstavljeni su tačkama, a raspored tačaka ukazuje na jačinu i smer *povezanosti* varijabli.

❓ *Kako bi izgledao dijagram raspršenja ako je jedna od dve varijable kategorijalna, odnosno ukoliko su na jednoj od varijabli rezultati razvrstani u nekoliko kategorija, tj. grupa?*

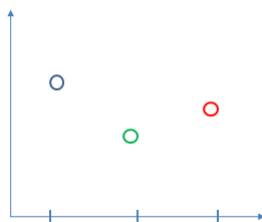
2.2 Tačka tačka tačkica...

U slučaju da dvema koordinatnim osama predstavljamo rezultate na jednoj mernoj i jednoj kategorijalnoj varijabli, svi rezultati koji pripadaju istoj kategoriji bi na osi koja predstavlja kategorijalnu varijablu imali istu vrednost, a razlikovali bi se s obzirom na vrednosti na mernoj varijabli. Na primer, kao na slici 2.2:



Slika 2.2. Grafik pojedinačnih rezultata merenja tri grupe

Različiti rezultati merenja unutar svake grupe mogu se sažeti u jednu vrednost koja bi bila njihov reprezent. To može biti njihova aritmetička sredina – ukoliko su podaci normalno distribuirani i zadovoljavaju ostale uslove za račun ove mere centralne tendencije. Takav grafik bi izgledao kao na slici 2.3:



Slika 2.3. Grafik prosečnih rezultata merenja tri grupe

Ovakav grafik pokazuje *poziciju* koju imaju prosečne vrednosti na jednoj varijabli na kategorijama druge varijable. Pritom, pozicija odražava *razliku* između kategorija – npr. kategorija obojena zelenom bojom ima niži prosečan rezultat od crvene i plave.

❓ *Da li grafik na kome je prikazana pozicija rezultata govori i o povezanosti dve varijable?*

Kao i raspršenje rezultata na dvema mernim varijablama, pozicija govori o *odnosu* dve varijable od kojih je jedna grupišuća a druga merna, odnosno pokazuje njihovu *povezanost*. Možemo postaviti pitanje da li se grupe razlikuju u odnosu na rezultat na određenoj varijabli, ili pak da li je grupna pripadnost povezana sa rezultatom na toj varijabli. *Da li postoji povezanost i da li postoje razlike* dva su načina da se postavi isto pitanje.

2.2.1 ... gotova je linijica

Na graficima kojima se pokazuje odnos kvantitativne i kvalitativne varijable, tačke se uobičajeno spajaju linijom. Verovatan razlog tome je što se niz tačaka perceptivno organizuje u celinu, koja odgovara konturi koja povezuje tačke linijom (Feldman, 1999; Pomerantz, 2017). Na ovaj način se bolje vizuelno ističe odnos između tačaka, odnosno lakše se zapažaju razlike u vrednostima grupa na kvantitativnoj varijabli. Otuda je ustaljen naziv za ovakav grafik na engleskom *line plot* (analogno sa *scatter plot*).

Ovakav grafik je predstavljen u apletu [Linija](#). Na njemu su na y-osi predstavljeni skorovi na mernoj varijabli, dok su na x-osi predstavljene tri grupe, odnosno tri modaliteta koje opisuju kategorijalna varijabla. Kada su u pitanju varijable sa ograničenim brojem kategorija, čest naziv za njene kategorije su *nivoi*. U apletu je kategorijalna varijabla označena sa A, a njeni nivoi sa A1, A2 i A3.

Neka su, na primer, na grafiku predstavljeni prosečni skorovi tri grupe studenata na određenom testu znanja. Neka su studenti podeljeni u grupe s obzirom na dominantni kognitivni stil, koji karakteriše njihovo usvajanje znanja i baratanje informacijama – tekstualni, odnosno stil čitanja-pisanja (A1), kinestetički (A2) ili vizuelni (A3). Navedeni stilovi su neki od načina učenja, opisani u većem broju modela (Fahim et al., 2021; Hawk & Shah, 2007). Studenti koji uče na osnovu čitanja i zapisivanja najbolje uče u interakciji sa tekstualnim materijalom – pravljenjem izvoda i beležaka i korišćenjem izveštaja, udžbenika, definicija, priručnika i *web* stranica. Studenti koji uče kinestetički, imaju najbolji učinak kada koriste fizičko iskustvo, odnosno delovanje – manipulišu objektima, pomeraju i dodiruju ih, izvode određene aktivnosti. Studenti koji preferiraju vizuelni način učenja, uče najbolje uz pomoć grafika, slika, dijagrama i ostalih vizuelnih demonstracija (El Tantawi, 2009; Leite et al., 2010). Pretpostavimo da su sve tri grupe studenata pohađale isti kurs, u kojem su bili podjednako zastupljeni vizuelni, tekstualni i kinestetički sadržaji, nakon čega su rešavale isti test znanja u formi pitanja i odgovora. Rezultati studenata su izraženi brojem osvojenih bodova na testu. Posmatrajući opisani grafik, koji se početno dobija pristupom apletu [Linija](#), razmislite o sledećim pitanjima:

❓ *Koje varijable prepoznajete u opisanom primeru istraživanja?*

Stil učenja je jedna varijabla, dok je uspeh na testu druga varijabla.

❓ *Kog nivoa merenja su ove varijable?*

Stil učenja je kvalitativna varijabla, odnosno varijabla nominalnog nivoa merenja sa tri kategorije: verbalni, kinestetički i vizuelni stil učenja. Uspeh na testu izražen brojem osvojenih bodova je kvantitativna varijabla, intervalnog nivoa merenja.

❓ *Koja od ove dve varijable je zavisna a koja nezavisna?*

Pretpostavljamo da uspeh na testu, koji je postigao neki učenik, zavisi od toga kakav je njegov stil učenja – određeni stil učenja možda donosi bolje rezultate na testu. Otuda je stil učenja nezavisna, a skor na testu zavisna varijabla.

❓ *Kako su zavisna i nezavisna varijabla predstavljene na grafiku?*

Na x-osi su predstavljene kategorije nezavisne varijable, odnosno stilovi učenja (A1, A2 i A3). Na y-osi se nalaze rezultati testa znanja. Zapazite da je ovo nalik grafičkom prikazu varijabli u jednostavnoj linearnoj regresiji u apletu *Kartezije ili korelacija*, s tim da se zavisna varijabla Y ovde predviđa na osnovu *kategorijalnog prediktora*.

2.2.2 ... horizontalna ili ne...

❗ *Posmatrajte rezultate prikazane na grafiku koji se dobija otvaranjem apleta [Linija](#). Da li se rezultati grupa predstavljaju aritmetičkim sredinama vizuelno razlikuju?*

Da. Grupa čiji je preferirani način učenja čitanje-pisanje (A1) ima najviše rezultate na testu, grupa koju karakteriše dominantan vizuelni stil (A3) nešto niže, dok je grupa sa kinestetičkim stilom učenja (A2) postigla najniže rezultate.

Sličan rezultat je dobijen u istraživanju Rakapa (2010), u kojem je pokazano da u savlađivanju sadržaja *online* kursa, čija je tema bila dijagnostika i poznavanje autizma, studenti koji u učenju najčešće koriste čitanje-pisanje i vizuelne sadržaje, postižu više rezultate u odnosu na studente koji preferiraju kinestetički stil. Ovaj rezultat bi se delom mogao objasniti time da je u ovom istraživanju uspešnost procenjivana na osnovu testa koji je bio u standardnoj formi pitanja i odgovora, a što je činilo izvesnu prednost za studente koji najlakše barataju tekstualnim informacijama.

❗ *Koliko bodova na testu su u proseku osvojile posmatrane grupe studenata?*

Prosečne vrednosti grupa su na grafiku predstavljene njihovim *aritmetičkim sredinama*. Aritmetičke sredine grupa su na grafiku predstavljene *tačkama*, tačnije *kružićima*. Njihove vrednosti možete očitati na y-osi, a takođe ih možete videti i u desnom delu apleta: grupa A1 je u proseku osvojila 18 bodova, grupa A2 je osvojila 12, dok je grupa A3 u proseku osvojila 15 bodova.

❗ *Razmislite u kakvom odnosu bi bili preferirani stilovi učenja i postignuće iz oblasti statistike.*

Vežba 2.1. *Promena vrednosti aritmetičkih sredina u apletu [Linija](#)*

Promenite vrednosti aritmetičkih sredina grupa na grafiku, koji se dobija otvaranjem apleta, tako da odgovaraju vašoj pretpostavci o rezultatu koji bi se dobio ispitivanjem odnosa stilova učenja i postignuća iz oblasti statistike. To možete postići tako što ćete mišem promeniti poziciju tačaka koje ih na grafiku predstavljaju. Istovremeno, promeniće se vrednosti aritmetičkih sredina grupa u desnom delu apleta.

Sprovedeno je svega nekoliko istraživanja koja su se bavila odnosom postignuća u statistici i stilova učenja, i ona su dala različite rezultate (npr. Bill, 1998). Razlike u rezultatima su verovatna posledica razlika u uzorcima ispitanika, sadržajima i karakteristikama statističkih kurseva čija uspešnost savlađivanja je merena, kao i procenjivanim stilovima učenja. Neka od ovih istraživanja su pokazala da povezanosti nema. Takvo je, na primer istraživanje Rautopuroa i Veisenena iz 2003. godine (Rautopuro & Väisänen, 2003). Sličan rezultat je dobijen i u nešto

novijem istraživanju koje se bavilo srodnim pitanjem uspešnosti u matematici, koje je pokazalo da stil učenja ne utiče na postignuće u ovoj oblasti (Rahman & Ahmar, 2017). Ovakvi rezultati sugerišu da su razlike između studenata u uspešnosti u oblastima statistike i matematike posledica nekih drugih faktora, a ne različitih stilova učenja.

🔗 Kako bi izgledao grafik koji pokazuje da nema povezanosti između grupne pripadnosti i skora na testu?

U slučaju da ne postoji povezanost grupne pripadnosti i skora na testu, aritmetičke sredine grupa treba da imaju približno jednake vrednosti, odnosno linija na grafiku treba da je *horizontalna*. Vrednosti aritmetičkih sredina u delu apleta desno trebalo bi da budu približno jednake.

🔗 Na kom još vizuelnom prikazu horizontalna linija upućuje na nepostojanje relacije između varijabli?

Analogija sa regresijom – ponovo! Regresiona linija na vizuelnom prikazu predviđanja rezultata na jednoj varijabli na osnovu rezultata na drugoj varijabli može imati različite pravce, kao što je pokazano u odeljku *Kartezije ili korelacija*. U slučaju kada su varijable standardizovane, odnosno ujednačene po varijansi, horizontalan pravac regresione linije upućuje na nepostojanje povezanosti, odnosno nemogućnost preciznog predviđanja. Analogno sa regresionom analizom, ovakav rezultat bi pokazivao da nije moguće predvideti studentov skor na testu na osnovu njegovog stila učenja.

2.2.3 ... pitanje interpretacije

2.2.3.1 Variranja između grupa: oblik linije

Kroz prethodne primere iz odeljka 2.2 može se zapaziti da je interpretacija rezultata na linijskom grafiku veoma intuitivna i laka za razumevanje: veća ili manja međusobna udaljenost tačaka, s obzirom na poziciju koju na y-osi imaju njihove projekcije, pokazuje koliko su razlike između grupa izražene, odnosno kolika je mogućnost predviđanja skora na zavisnoj varijabli na osnovu pripadnosti grupi. Jednake aritmetičke sredine grupa, kakve su opisane u primeru rezultata na testu znanja iz statistike, pokazuju da nema razlika u postignuću posmatranih grupa studenata. Nasuprot tome, njihove različite vrednosti, kakve su prikazane u početnom primeru, pokazuju da se grupe razlikuju u odnosu na postignuće. Promenimo li pozicije tačaka na vrednosti $M_{A1}=19$, $M_{A2}=11$ i $M_{A3}=16$, razlike će vizuelno postati još izraženije.

Promenama veličina razlika između aritmetičkih sredina menjane su veličine njihovog međusobnog variranja od nultog (kada razlika nema) do većeg (kada razlika ima). S obzirom na

to da aritmetičke sredine reprezentuju rezultate grupa, može se reći da su na graficima iz prethodnih primera položajem kružića bile predstavljane različite *varijabilnosti između grupa*. Veća ili manja varijabilnost posledica je jačine uticaja grupne pripadnosti na mereno svojstvo. U opisanom primeru to je uticaj kognitivnog stila na uspeh na testu.

Međutim, zaključivanje o izraženosti delovanja grupne pripadnosti samo na osnovu pozicije kružića na grafiku, odnosno „oblika“ linije, može da bude varljivo. Prvo, kružići na grafiku će delovati bliže ili udaljenije zavisno od toga kako su prikazane vrednosti na y-osi – i male razlike mogu delovati kao velike ukoliko je na osi predstavljen samo deo ukupnog raspona vrednosti, pri čemu su podeoci veoma „usitnjeni“. Ovaj problem upućuje na potrebu za pažljivijom analizom grafika i vrednosti predstavljenih na y-osi. No, pored ovog problema, koji se relativno lako može rešiti izvežbanom oprežnošću u interpretaciji, ostaje još najmanje jedan...

2.2.3.2 Variranja unutar grupa: linije greške

Kako bi se jasnije i preglednije pokazali odnosi među grupama, na linijskom grafiku su rezultati grupa sažeto predstavljeni tačkama, odnosno kružićima koji predstavljaju njihove aritmetičke sredine. Time su, međutim, zanemarene vrednosti pojedinačnih rezultata, koje manje ili više odstupaju od aritmetičkih sredina svojih grupa. Ovakva *variranja rezultata unutar grupa* čine svojevrsan „kontekst“ ili „okvir“ u kome treba posmatrati međugrupna variranja. U terminima bazičnih postavki geštalt psihologije, ukoliko predstavimo međugrupna variranja kao figuru na slici, unutargrupna variranja će činiti njenu „pozadinu“, ili „šum“ koji će uticati na vidljivost međugrupnih variranja. Drugim rečima, ista varijabilnost između grupa može izgledati drugačije, odnosno može biti izražena manje ili više zavisno od unutargrupnih variranja.

Otuda informativan grafik, osim aritmetičkih sredina, treba da pokaže i odstupanja pojedinačnih rezultata od njih. Međutim, grafički prikaz na kome bi bili predstavljeni svi pojedinačni rezultati, osim u slučaju kada ih je mali broj, obično ne daje jasnu i preglednu sliku – upravo iz tog razloga se i koriste njihove sažete mere. Analogno sažetom prikazu rezultata grupa merama centralne tendencije, u svrhu sažetog prikaza variranja pojedinačnih rezultata oko mera centralne tendencije koriste se mere varijabilnosti rezultata u grupama. Čest engleski naziv za njihov grafički prikaz je *error bars*, jer govore o grešci sa kojom je izračunata mera centralne tendencije i jer su na grafiku predstavljene linijama, trakama. Srpski prevod ovog termina bi uslovno mogao da bude *opseg* ili *linija greške*. Prikazivanje linija greške uz aritmetičke sredine se u novije vreme posebno ohrabruje, jer se time obezbeđuju veća potpunost i transparentnost rezultata i bolji uslovi za upoređivanja rezultata sličnih studija na različitim uzorcima, što je u fokusu trenda metaanalitičkih i replikacionih studija u psihologiji (Cumming, 2008 i 2014).

Postoji veći broj pokazatelja unutargrupnih variranja koji se mogu grafički prikazati linijama greške:

1) Mere varijabilnosti zasnovane na prosečnom kvadriranom odstupanju pojedinačnih vrednosti od aritmetičke sredine, kakve su *varijansa* ili *standardna devijacija*. U ovakvom prikazu linijama može biti označen opseg rezultata oko aritmetičke sredine koji obuhvata, na primer, jednu standardnu devijaciju. Veoma varijabilni rezultati biće predstavljeni širim opsezima oko aritmetičkih sredina, pokazujući da su pojedini rezultati u jednoj grupi bliži prosečnom rezultatu neke druge grupe nego svoje. Usled toga će razlike između grupa delovati „zamašnjene“, „zamućene“ širokom lepezom vrednosti pojedinačnih rezultata.

Prikazivanjem mera varijabilnosti na grafiku može se steći bolji deskriptivni uvid u to koliko su aritmetičke sredine dobri reprezenti ostalih podataka u uzorku merenja, dobijenih u istraživanju čiji rezultati su predstavljeni. Međutim, rezultati nekog konkretnog istraživanja najčešće nas interesuju kako bismo *zaključili* da li ukazuju na pravilnost koja se može primeniti i na druge slučajeve i merenja, ili su pak izolovana posledica slučajnih ili sistematskih grešaka koja se u nekom ponovljenom istraživanju ne bi reprodukovala. Koliko je verovatno da bi se rezultati ponovili na drugim uzorcima ispitanika i merenja, odnosno u kojoj meri se mogu *generalizovati* na populaciju ispitanika i merenja na koju se odnose, ne zavisi samo od toga koliko su aritmetičke sredine dobri reprezenti podataka iz *uzorka* (što pokazuju linije greške koje predstavljaju standardne devijacije ili varijanse), već i od toga koliko su dobri reprezenti podataka u *populaciji*. Otuda se na grafičkim prikazima kao pokazatelji varijabilnosti češće koriste oni koji mogu da pokažu preciznost procene aritmetičke sredine dobijene na uzorku.

2) *Standardna greška aritmetičke sredine* je mera preciznosti procene aritmetičke sredine koja zavisi kako od varijabilnosti rezultata, tako i od veličine uzorka. Varijabilnost rezultata predstavljena je standardnom devijacijom, pri čemu su procene na varijabilnijim podacima podložne većoj grešci. Obrnuto, veći broj merenja za koje je aritmetička sredina izračunata obezbeđuje njenu pouzdaniju procenu. Odnos standardne greške i ove dve veličine se formulom izražava kao:

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

– gde je s_M standardna greška aritmetičke sredine M , s standardna devijacija, a N broj ispitanika. Korenovanje veličine N ukazuje na to da se, povećanjem veličine uzorka, standardna greška ne smanjuje linearno, odnosno da pri istim vrednostima standardnih devijacija povećanje malih uzoraka ima veći efekat na smanjenje greške u odnosu na efekat koji ima povećanje već velikih uzoraka ([Pajić, 2020](#)).

Standardna greška aritmetičke sredine se u zaključivanju o populaciji na osnovu podataka uglavnom interpretira kao standardna devijacija distribucije aritmetičkih sredina koja bi se formirala hipotetičkim ponovljenim uzimanjem velikog broja uzoraka iste veličine iz iste

populacije. Budući da je standardna greška takođe mera varijabilnosti, i ona se na grafiku može prikazati opsezima oko aritmetičke sredine, pri čemu veličina opsega iznosi jednu standardnu grešku:

$$M \pm s_M$$

U tom slučaju, opsezi opisuju interval vrednosti aritmetičkih sredina koje bi se dobile na drugim uzorcima, pri čemu širina opsega ukazuje na to koliko je precizno procenjena aritmetička sredina na posmatranom uzorku. Uži opsezi upućuju na precizniju procenu, veću verovatnoću da se ista vrednost dobije i u drugim ponovljenim istraživanjima, te da se rezultati sprovedenog istraživanja mogu sa većom sigurnošću generalizovati na populaciju merenja na koju se odnose.

Međutim, veličina od *jedne* standardne greške pokazuje moguća odstupanja od vrednosti dobijene na posmatranom uzorku u veličini jedne standardne devijacije, koji obuhvata približno 68% slučajeva. S obzirom na to, ovaj podatak bi govorio o verovatnoći od 68% da se prava, odnosno populacijska vrednost aritmetičke sredine nalazi u prikazanom opsegu vrednosti, i istovremeno 32% nesigurnosti u zaključak o opsegu vrednosti u kom bi se populacijska vrednost nalazila. Kako se ovom veličinom intervala obezbeđuje relativno mali stepen sigurnosti u zaključak, umesto njega se češće upotrebljavaju širi intervali, koji omogućavaju zaključivanje sa većom pouzdanošću ili poverenjem.

3) *Intervali poverenja* ili *intervali pouzdanosti* pokazuju širi raspon vrednosti aritmetičkih sredina koje bi se dobile u ponovljenim merenjima na drugim uzorcima iste veličine, pri čemu taj raspon uobičajeno obuhvata 95% ili 99% mogućih vrednosti – što su rasponi od približno dve ili dve i po standardne greške. Ovi rasponi se na grafiku takođe mogu pokazati kao opsezi oko aritmetičkih sredina, čija dužina se dobija množenjem standardne greške sa željenom širinom intervala. U slučaju 95% intervala pouzdanosti to bi bilo:

$$M \pm 1,96 \cdot s_M$$

– gde su -1,96 i +1,96 mesta u distribuciji standardizovanih vrednosti uzoračkih aritmetičkih sredina između kojih se nalazi približno 95% središnjih vrednosti.

U kontekstu vizuelnog prikaza većeg broja aritmetičkih sredina, interval poverenja je pokazatelj koji se može najčvršće dovesti u vezu sa interpretacijom odnosa između aritmetičkih sredina različitih grupa (Cumming, 2014). Otuda su za pokazatelj varijabilnosti unutargrupnih rezultata na linijskom grafiku u apletu [Linija](#) odabrani upravo intervali poverenja. U vežbi 2.2 je dodatno pojašnjeno formiranje i račun intervala poverenja i objašnjen način variranja njihove veličine u apletu.

Vežba 2.2. Variranje veličina intervala poverenja u apletu [Linija](#)

Na prikazanom linijskom grafiku u apletu intervali poverenja su predstavljeni vertikalnim linijama paralelnim sa y-osom koje prolaze kroz svaki od tri tačke-kružića na grafiku. Njihove dužine možete varirati menjajući veličine od kojih zavisi vrednost standardne greške aritmetičke sredine.

- 1) Postavite vrednosti aritmetičkih sredina na grafiku tako da iznose $M_{A1}=18$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$. Selektujte tačku-kružić koji predstavlja aritmetičku sredinu jedne od grupa, na primer grupe A1.
- 2) Zapazite dve skale koje se nalaze u delu apleta desno. Na levoj od njih predstavljene su moguće vrednosti *standardne devijacije* rezultata koje se kreću u rasponu od 0 do 10. Ukoliko mišem „povlačite“, pomerate kružić na skali, menjaćete i vrednost standardne devijacije. Postavite vrednost na skali tako da standardna devijacija za grupu A1 iznosi $s_{A1}=6$.
- 3) Na desnoj od dve skale nalaze se moguće vrednosti *broja ispitanika* u grupi, koje se kreću u rasponu od 0 do 300. Menjanjem ovih vrednosti povlačenjem kružića mišem, menjaće se i broj ispitanika, što će se odraziti na veličinu kružića na grafiku koji predstavlja aritmetičku sredinu grupe. Postavite veličinu uzorka A1 na $N_{A1}=50$ ispitanika.
- 4) Odnos standardne devijacije i korenovanog broja ispitanika predstavlja standardnu grešku aritmetičke sredine s_M ([Pajić, 2020](#)). Vrednosti standardnih grešaka za svaku grupu se nalaze u delu apleta desno, pored vrednosti aritmetičkih sredina (s_{M1} , s_{M2} i s_{M3}). Na primer, ako vrednost standardne devijacije rezultata u grupi od 50 ispitanika iznosi 6, s_M će imati vrednost:

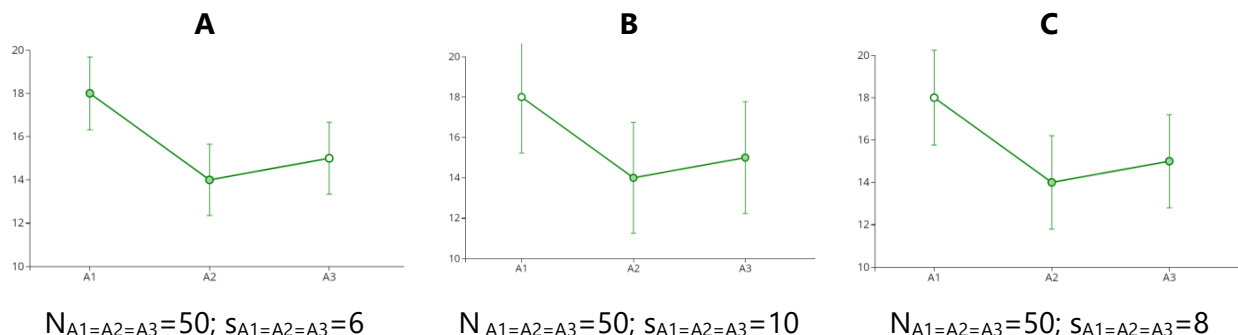
$$s_M = \frac{6}{\sqrt{50}} = 0,85$$

- 5) Na osnovu standardne greške aritmetičke sredine izračunavaju se intervali poverenja željene širine – u apletu je to 95% interval. Na primer, ako aritmetička sredina za grupu A1 iznosi $M_{A1}=18$, a $s_M=0,85$, 95% interval poverenja će obuhvati vrednosti od 16,33 do 19,67, jer je $18 \pm 1,96 \cdot 0,85 = 18 \pm 1,17$. Dužina vertikalne linije koja prolazi kroz kružić aritmetičke sredine predstavlja raspon vrednosti koje obuhvata ovaj interval.
- 6) Za preostale dve grupe postavite intervale poverenja koji se dobijaju za njihove aritmetičke sredine u slučaju da su takođe izračunate na 50 ispitanika i da njihove standardne devijacije iznose takođe $s_{A2}=s_{A3}=6$.

Grafik koji se dobija ovakvim postavljanjem vrednosti prikazan je na slici 2.4, u primeru A.

2.2.3.3 Između vs. unutar grupa

Zadatak 2.1. Posmatrajte grafik u primeru A na slici 2.4 i/ili istovetan grafik u apletu [Linija](#) dobijen u vežbi 2.2, i pokušajte da zaključite da li prikaz vrednosti aritmetičkih sredina i njihovih intervala poverenja sugeriše da različite grupe postižu različite rezultate.



Slika 2.4. Primeri linijskih grafika sa jednakim M i različitim dužinama intervala poverenja

U primeru A opsezi intervala poverenja su relativno uski te dobijene razlike u vrednostima aritmetičkih sredina grupa verovatno odražavaju sistematsku razliku između njih, kakva bi se dobila i u drugim istraživanjima sprovedenim na isti način. U kontekstu opisanog problema istraživanja u kome učenici različitih stilova učenja rešavaju određeni test znanja, može se očekivati da postoji izražena tendencija da učenici različitih stilova učenja budu različito uspešni u rešavanju testa.

Zadatak 2.2. Postavite sada intervale poverenja u apletu [Linija](#) za sve tri grupe tako da su aritmetičke sredine jednake kao u primeru A, da svaka od njih i dalje predstavlja rezultate 50 ispitanika, ali da su standardne devijacije merenja znatno veće – neka iznose $s_{A1}=s_{A2}=s_{A3}=10$. Ponovo interpretirajte veličinu razlika između aritmetičkih sredina u kontekstu intervala poverenja.

Dobijeni grafik bi trebalo da izgleda kao u primeru B na slici 2.4. S obzirom na to da su vrednosti aritmetičkih sredina grupa jednake onim prikazanim u prethodnom primeru A i da su dobijene na jednakom broju merenja, razlika u odnosu na primer A se može pripisati isključivo varijabilnosti rezultata merenja, koja je izražena širinom intervala poverenja. Znatno širi intervali poverenja u odnosu na primer A sugerišu veću mogućnost da su razlike u rezultatima grupa dobijene kao posledica greške nastale pri merenju i da je malo verovatno da ukazuju na sistematsku pravilnost. U kontekstu ispitivanja relacija između različitih stilova učenja i uspešnosti na testu znanja, može se zaključiti da dobijene razlike u vrednostima aritmetičkih sredina mogu znatno da variraju u drugim istraživanjima i merenjima, i da se ne očekuje pravilnost da pojedini stilovi učenja daju bolje rezultate od drugih.

Na osnovu zadataka 2.1 i 2.2 može se zaključiti sledeće:

Prvo, poredeći grafičke prikaze u primerima A i B, može se zapaziti da iste vrednosti aritmetičkih sredina mogu upućivati na izraženije ili manje izražene razlike u postignuću, zavisno od toga koliko u posmatranim grupama rezultati variraju i, posledično, koliko su dobijene aritmetičke sredine pouzdane procene postignuća.

Drugo, obogaćenje linijskog grafika intervalima poverenja obezbeđuje mogućnost da se zaključi o tome koliko rezultati dobijeni na uzorku upućuju na pravilnost koja može da se generalizuje na merenja sprovedena na drugim uzorcima sličnih karakteristika. S obzirom na to da se sprovodi na osnovu vizuelnog prikaza, ovakav vid zaključivanja naziva se *vizuelno zaključivanje* ili, u literaturi na engleskom, *inference by eye* (Cumming, 2009; Cumming & Finch, 2005).

Pokušajte da primenite vizuelno zaključivanje u još jednom zadatku:

Zadatak 2.3. Postavite intervale poverenja u apletu [Linija](#) za sve tri grupe tako da su njihove aritmetičke sredine jednake kao u primerima A i B, da su takođe izračunate za rezultate 50 ispitanika, ali da su standardne devijacije merenja $s_{A1}=s_{A2}=s_{A3}=8$. Da li se sada čini izvesnijim da se grupe razlikuju s obzirom na postignuće ili ne?

Dobijeni grafik bi trebalo da izgleda kao u primeru C na slici 2.4. U ovom primeru pravilnost je manje očigledna – intervali su širi nego u primeru A, a uži nego u primeru B. Ukoliko ste odgovorili da ovaj prikaz upućuje na to da se ne može očekivati pravilnost da se rezultati grupa razlikuju, odgovorili ste onako kako bi intuitivno odgovorila većina procenjivača u sličnom zadatku, ali netačno (Belia et al., 2005; Schenker & Gentleman, 2001).

Ono što u vizuelnoj proceni razlika na osnovu intervala poverenja može da zavede jeste oslanjanje na *preklapanje* intervala poverenja i pogrešna intuicija o tome da ukoliko se intervali delom preklapaju svojim dužinama – što je u primeru C slučaj između svih parova intervala – razlike između aritmetičkih sredina nisu dovoljno izražene da bi upućivale na sistematsku pravilnost. Ova pogrešna interpretacija se verovatno zasniva na vizualizaciji poređenja određene vrednosti, dobijene na jednom uzorku merenja, sa nekom fiksnom vrednošću u populaciji, gde vrednosti koje se nalaze izvan granica intervala pripadaju nekoj drugoj populaciji rezultata. U slučaju 95% intervala poverenja, verovatnoća da se na uzorku dobiju ovakve ekstremne vrednosti iznosi 5%, pri čemu je verovatnoća da se dobije aritmetička sredina koja je *niža* od donje granice intervala 2,5%, kao što je i verovatnoća da se dobije aritmetička sredina *viša* od gornje granice intervala 2,5%. Međutim, pri poređenju aritmetičkih sredina *dva* uzorka verovatnoća da će se aritmetička sredina dobijena na jednom uzorku nalaziti među 2,5% vrednosti *iznad gornje granice* njenog intervala poverenja, a da će se aritmetička sredina dobijena na drugom uzorku nalaziti među 2,5% vrednosti *ispod donje granice* njenog intervala poverenja, znatno je *niža od 5%*. Otuda se 95% intervali poverenja *mogu delom preklapati* i u slučaju da odražavaju razliku koja je vredna interpretacije. Tačna veličina preklapanja intervala

koja i dalje upućuje na razliku zavisi od broja i varijabilnosti merenja, no ona približno iznosi nešto više od četvrtine dužina intervala (Austin & Hux, 2002).

Zadatak 2.3 i grafički prikaz C upućuju na to da je u nekim slučajevima za vizuelno zaključivanje potrebno nešto dodatnog znanja i izvežbanosti. Takođe, zadatak vizuelnog zaključivanja je posebno izazovan kada je potrebno interpretirati razlike između više od dve aritmetičke sredine, kao u prikazanim primerima. Čini se da u zoni ovakvih zadataka i problema postoji izraženija potreba da se vizuelna analiza upotpuni dodatnom, komplementarnom analizom u kojoj bi vizuelno predstavljeni odnosi imali svoj numerički izraz (Biehler, 1994). Ovaj vid zaključivanja je prisutan u *statističkom testiranju*.

2.3 Statističko testiranje u psihologiji

U psihologiji je učestalija primena statističkih testova počela tek sredinom 50-ih godina XX veka, kada je u ovoj nauci već postojao znatan korpus znanja i istraživačka praksa. Razlog ovom nije to što statistički testovi do tada nisu bili osmišljeni i primenjivani. Prva primena statističkog testa zabeležena je još u XVII veku, kada je škotski fizičar, matematičar i satiričar Džon Arbuthnot (John Arbuthnot, 1667–1735) testirao postojanje fenomena za koji je verovao da je izraz božanskog providenja – pravilnost da se rađa nešto više muške dece u odnosu na žensku nego što bi se to očekivalo na osnovu slučaja po kome bi ih se rađao jednak broj, čime se nadoknađuje češće stradanje muškaraca i obezbeđuje približno jednak broj muškaraca i žena u reproduktivnom periodu (Arbuthnot, 1710). U XIX veku testiranje verovatnoće dobijenih podataka u odnosu na pretpostavljene primenjivano je u astronomiji, za detekciju aberantnih rezultata (Gigerenzer, 2004).

Početak primene statističkog testiranja u psihologiji, a zatim i u drugim društvenim naukama, vremenski koincidira sa najmanje dve okolnosti.

Prva okolnost je porast značaja koncepta verovatnoće u objašnjenju sveta, nazvan *probabilistička revolucija* (Gigerenzer & Marewski, 2015). Nastali još tokom XIX veka, produkti ove revolucije su se posebno dobro uklopili u sliku sveta posle prvog i drugog svetskog rata. Nakon ratnih potresa i razaranja, društvenih promena i naglog tehnološkog razvoja, svet je postao brže i neizvesnije mesto. U takvom svetu odgovori na pitanja postajali su sve manje sigurni i pouzdani, a sve više su sadržali izvesnu količinu neizvesnosti koja je izražavana kroz verovatnoću i šanse – nasleđivanje osobina se dešava sa verovatnoćom opisanom Mendelovim zakonima, intenzitet elektromagnetnog zračenja zavisi od verovatnoće prelaska elektrona iz stanja veće u stanje manje pobuđenosti, a Šredingerova mačka je živa ili ne u zavisnosti od prethodnih nasumičnih događaja. Međutim, dok se u prirodnim naukama verovatnoća utkala u sam *sadržaj* znanja, u psihologiji i društvenim naukama obeležila je *metod* saznanja u kome su rezultati ispitivanja

interpretirani u terminima verovatnoće da su vredni da postanu deo naučnog znanja. Tako je probabilistička revolucija u društvenim naukama dovela do svojevrsne *revolucije zaključivanja* (engl. *inference revolution*) (Gigerenzer, 1993 i 2004; Gigerenzer & Marewski, 2015).

Druga okolnost je bila narastajuća potreba za primenom statističkog testiranja u psihologiji. Naime, dotadašnji eksperimenti u laboratorijama Vunta, Skinnera, Kelera i Pijažea sprovedeni su nad pojedinačnim subjektima uz visok stepen kontrole uslova, što je obezbeđivalo da greška u proceni bude gotovo nepostojeća, te statističko testiranje, koje bi pokazalo koliko je izraženost ispitivanog fenomena veća od izraženosti greške, nije bilo neophodno. Međutim, sredinom XX veka poraslo je interesovanje za psihološke fenomene koji su varijabilniji od onih ispitivanih u laboratorijama i na čije merenje mogu uticati brojni uslovi koje je teže kontrolisati. Takva je, na primer, bila oblast edukacije u kojoj su u cilju utvrđivanja praktičnih smernica o tehnikama i metodama nastave sprovedeni eksperimenti sa eksperimentalnim i kontrolnim grupama, u kojima je bilo potrebno porediti prosečna postignuća učenika uzimajući u obzir njihove individualne razlike (Gigerenzer, 2004).

Logika statističkog testa kojim bi se testirale razlike između aritmetičkih sredina trebalo bi da sledi opisanu logiku sticanja vizuelnog utiska o rezultatima, koja u osnovi ima procenu veličine variranja aritmetičkih sredina *u odnosu* na veličinu variranja pojedinačnih podataka, pri čemu bi test ovaj odnos izrazio kvantitativno.

2.3.1 Kvantifikacija variranja

2.3.1.1 Varijansa između grupa

🔗 *Kako biste veličinu razlika između aritmetičkih sredina odredili u slučaju dve grupe?*

Razlika između dve aritmetičke sredine na linijskom grafiku odgovara rastojanju između tačaka na y-osi koje predstavljaju projekcije aritmetičkih sredina grupa na nju. Izraženo numerički, to rastojanje odgovara razlici između vrednosti dve aritmetičke sredine. Na ovaj način razliku između aritmetičkih sredina numerički predstavlja *t test*, namenjen testiranju razlike između dve aritmetičke sredine (Pajić, 2020). Međutim, sada je potrebno utvrditi koliko iznosi razlika između aritmetičkih sredina kada ih je više od dve – u ovom primeru tri.

Razlika između više od dve aritmetičke sredine može da se izrazi veličinom odstupanja od njihove *zajedničke aritmetičke sredine* (engl. *grand mean* ili *total mean*). Zajednička aritmetička sredina se može na grafiku predstaviti ili zamisliti kao horizontalna linija koja je pozicionirana tako da predstavlja centar ravnoteže pojedinačnih aritmetičkih sredina – odnosno tako da su odstupanja naviše i naniže od nje jednaka. Što aritmetičke sredine više variraju oko zajedničke

aritmetičke sredine, razlika između njih je veća. Veličina ovih variranja brojčano se može izraziti na sledeći način:

$$\text{variranja između grupa} = \frac{\sum n(M_g - M_t)^2}{k - 1}$$

– gde su M_g aritmetičke sredine grupa (engl. *group mean*), M_t zajednička aritmetička sredina, n broj ispitanika u pojedinačnoj grupi, a k broj grupa.

Prikazan izraz upućuje na to da su u računu veličine variranja uzete u obzir sledeće komponente:

1) Veličina odstupanja

Pokazatelj veličine razlika između aritmetičkih sredina pojedinačnih grupa je suma razlika aritmetičke sredine svake od grupa (M_g) i zajedničke aritmetičke sredine (M_t).

2) Kvadrirana veličina odstupanja

❓ *Koliko bi iznosila suma odstupanja pojedinačnih sredina od zajedničke sredine?*

Suma odstupanja bilo kojih vrednosti od njihove aritmetičke sredine iznosi uvek 0 bez obzira na veličinu odstupanja, jer je aritmetička sredina „težište“ rezultata. Stoga se odstupanja kvadriraju.

3) Broj ispitanika u grupama

Aritmetička sredina pojedinačne grupe je reprezent svih dobijenih merenja u grupi. Broj merenja, odnosno opservacija koje srednja vrednost predstavlja, uzima se u obzir te se svako kvadrirano odstupanje množi njihovim brojem (n). Na taj način se određuju „težine“ pojedinačnih odstupanja, tako da veću „važnost“ dobijaju ona odstupanja koja su brojnija.

4) Broj grupa

Broj odstupanja povećava vrednost sume odstupanja, pa se stoga suma kvadriranih odstupanja deli brojem odstupanja, odnosno brojem grupa (k). Umanjenje broja k za jedan znači oduzimanje jednog stepena slobode (df) za slobodna, nasumična variranja vrednosti aritmetičkih sredina, jer će prosečna vrednost njihovih odstupanja ostati nepromenjena ako nepromenjena ostane vrednost najmanje jedne od njih ([Pajić, 2020](#)).

❓ *U opisanom računu se može prepoznati jedan pokazatelj raspršenja rezultata. Koji?*

Prosečno kvadrirano odstupanje rezultata od aritmetičke sredine je *varijansa* – kvadrirana standardna devijacija ili prosečno kvadrirano odstupanje rezultata od njihove aritmetičke sredine. Ovde je u pitanju prosečno kvadrirano odstupanje aritmetičkih sredina *grupa* od zajedničke aritmetičke sredine, pa se ova varijansa naziva *varijansa između grupa* ili *međugrupna*

varijansa. Označava se sa MS_b (od engl. *mean square between groups* u značenju *srednje kvadrirano odstupanje između grupa*), a specifičnim oznakama dopunjena formula za njeno izračunavanje bi bila:

$$\text{variranja između grupa} = \frac{\sum n(M_g - M_t)^2}{k - 1} = \frac{SS_b}{df_b} = MS_b$$

MS_b je količnik sume kvadriranog odstupanja između grupa (ili skraćeno SS_b od engl. *Summ of Squeres between groups*) i stepeni slobode (df). Nazivi i skraćenice MS , SS , kao i df , prihvaćeni su i usvojeni kao standard u predstavljanju rezultata testiranja razlika između više aritmetičkih sredina.

Varijansa između grupa – MS_b – predstavlja variranja u rezultatima na zavisnoj varijabli koja se mogu objasniti dejstvom nezavisne varijable. Nezavisna varijabla se u ovakvim istraživanjima naziva još i *faktor*, u značenju *uticaja*. Moglo bi se reći da smo u opisanim primerima u kojima smo menjali vrednosti aritmetičkih sredina varirali dejstvo faktora stila učenja na postignuće na testu. U apletu [Linija](#) brojčana vrednost ove varijanse se nalazi u tabeli desno u koloni sa nazivom MS i u redu označenom kao F_A , na mestu gde su zabeležena variranja čiji je izvor faktor A. Zapazite da je ova vrednost veća pri većim razlikama aritmetičkih sredina, a manja pri manjim.

2.3.1.2 Varijansa unutar grupa

❓ *Kako izračunati ukupna variranja unutar grupa posmatranih zajedno?*

Varijabilnost rezultata unutar grupa takođe se može predstaviti kao varijansa:

$$\text{varijansa unutar grupa} = \frac{\sum (X - M_g)^2}{N - k} = \frac{SS_w}{df_w} = MS_w$$

– gde je X pojedinačni rezultat u grupi, M_g aritmetička sredina grupe, N ukupan broj ispitanika, k broj grupa, df_w broj stepeni slobode unutar grupa, a SS_w suma kvadriranih odstupanja unutar grupa (od engl. *summ of squares within groups*). Ova varijansa se označava sa MS_w (od engl. *mean square within groups* – srednji kvadrat unutar grupa). S obzirom na to da ova varijansa upućuje na veličinu greške u proceni aritmetičkih sredina, naziva se još i *greška*. U tabeli na desnoj strani apleta veličina variranja koja potiču iz ovog izvora nalazi se u koloni MS i u redu *greška*. Zapazite da je ova vrednost manja pri kraćim linijama standardne greške, a veća pri dužim.

2.3.1.3 Ukupna i raščlanjena varijansa

Zadatak 2.4. *Saberite vrednosti suma kvadrata između i unutar grupa ($SS_b + SS_w$) prikazane u tabeli sa desne strane apleta. Razmislite o tome kakva variranja predstavlja ovaj zbir.*

Zbir suma kvadriranih odstupanja između i unutar grupa jeste vrednost *ukupne sume kvadriranih odstupanja*, koja predstavlja sumu kvadriranih odstupanja pojedinačnih rezultata od zajedničke aritmetičke sredine (SS_t). Ovo je zakonitost u variranju podataka: ukupna variranja rezultata se mogu raščlaniti na komponente, pri čemu zbir komponenti odgovara ukupnim variranjima.

U kontekstu rezultata pojedinačnih ispitanika, raščlanjavanje variranja bi značilo da je odstupanje svakog pojedinačnog rezultata od ukupne aritmetičke sredine određeno njegovim odstupanjem od aritmetičke sredine grupe kojoj pripada, i odstupanjem aritmetičke sredine te grupe od ukupne aritmetičke sredine. Drugim rečima, u primeru sa različitim stilovima učenja, rezultat na testu učenika Ž. Z. čiji dominantni stil učenja je vizuelni, odstupao bi od ukupnog proseka onoliko koliko prosek vizuelnih učenika odstupa od ukupnog proseka, i koliko njegov rezultat odstupa od proseka učenika sa istim vizuelnim stilom učenja. Individualni skor se može izraziti i kao:

$$Y_{z,z} = M_t + (M_{g.verb} - M_t) + (Y_{z,z} - M_{g.verb})$$

Sume kvadrata podeljene njihovim stepenima slobode više nisu sabirljiva, ali takođe predstavljaju variranja na koje je ukupna varijansa raščlanjena. Raščlanjavanje, odnosno *analiza varijanse*, omogućava da se komponente ukupne varijanse – varijansa između grupa i varijansa unutar grupa – stave u odnos kako bi se utvrdilo koliko puta je jedna veća od druge, što je osnov statističkog testa.

2.3.2 Test za rasklapanje varijanse

Stavljanjem u odnos varijanse između grupa i varijanse unutar grupa moguć je odgovor na pitanje koliko puta je prva veća od druge, odnosno koliko je izražen *efekat* nezavisne varijable. Kako je pokazano u prethodnim primerima i vežbama, ovo rešenje je u osnovi veoma vizuelno: treba odrediti da li su razlike između aritmetičkih sredina, predstavljene udaljenošću kružića ili tačaka na linijskom grafiku, veće nego što su razlike između pojedinačnih ispitanika u grupama, predstavljene linijama greške.

Najznačajniji doprinos u osmišljavanju ovog testa potekao je od autora čija je sposobnost mentalne vizualizacije bila veća od sposobnosti viđenja spoljašnjeg sveta. To je bio Ronald Fišer (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962), britanski statističar i genetičar. Veoma slabovid od detinjstva, on je razvio izrazitu sposobnost predstavljanja matematičkih odnosa i relacija

vizuelno, geometrijski (Crow, 1990; Hall, 2010). Na ovaj način on je osmislio brojne predloge za rešenje statističkih problema, od kojih je jedan i postupak za *analizu varijanse*, kojim se bavio za potrebe analiza rezultata eksperimenata nad kulturama u poljoprivrednoj stanici Rotamsted dvadesetih godina prošlog veka (Crow, 1990).

Jedan drugi statističar, koji je takođe imao značajan doprinos u razvoju i primeni ovog testa, Džorž Snedekor (George Waddel Snedecor, 1881–1974), u čast Ronalda Fišera test je nazvao prvim slovom Fišerovog prezimena. Formula za test prikazana je u slagalici u apletu [Linija](#).

2.3.2.1 Slagalice za F, a F za Fišera

Zadatak 2.5. Sastavite slagalicu od delova formule za test za analizu varijanse u apletu [Linija](#), koja izgleda ovako:

$$F = \frac{\sum n(M_g - \quad)^2}{\sum (\quad - M_g)^2} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$$

$k - 1$	df_b	M_t	X	df_w
SS_w	MS_w	SS_b	MS_b	$N - k$

Zadatak 2.6. Kolika je vrednosti F testa za podatke iz primera A iz zadatka 2.1, u kome su aritmetičke sredine grupa $M_{A1}=18$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$, standardne devijacije grupa $s_{A1=A2=A3}=6$, a veličine grupa $N_{A1=A2=A3}=50$?

Vrednost F testa se u apletu [Linija](#) nalazi u tabeli desno, u koloni F, i za prikazane podatke iznosi približno $F_{(2,147)} \approx 5,66$.

Posmatrajući formulu i oslanjajući se na logiku testa, odgovorite:

❓ Kada će F odnos imati vrednost 1? A kada će F odnos imati vrednost 0?

Vrednost $F=1$ ukazaće na to da međugrupna variranja nisu veća od unutargrupnih, odnosno da se grupe među sobom ne razlikuju više nego što se razlikuju rezultati unutar pojedinačnih grupa. Vrednosti koje su manje od jedan pokazivaće da su unutargrupna variranja veća od međugrupnih, a vrednost $F=0$ da se aritmetičke sredine grupa uopšte ne razlikuju.

❓ Kakav položaj linija na grafiku odgovara rezultatima u kojima F test ima vrednost 0?

Ovakav položaj linije opisan je prethodno u vežbi 2.2. Slično položaju regresione linije koja pokazuje odnos dve standardizovane varijable koje su u nultoj korelaciji, horizontalnom položaju linije koja spaja aritmetičke sredine odgovaraće vrednost $F=0$, bez obzira na veličinu linija greške.

❓ *Kakvim se izmenama na grafiku može povećati vrednost F testa?*

Vrednost F testa će biti tim veća što su veće razlike između kružića koji predstavljaju aritmetičke sredine grupa, a što su manje linije greške koje predstavljaju unutargrupna variranja.

❓ *Da li promena veličina kružića na grafiku utiče na promenu F vrednosti?*

Povećanje kružića na grafiku korespondira sa većim brojem ispitanika koje smanjuje grešku merenja i povećava F vrednost.

❓ *Da li je moguće izračunati F test u slučaju kada unutar grupa variranja nema? Proverite svoj odgovor na ovo pitanje koristeći opciju za variranje veličina standardnih devijacija u apletu.*

Variranja unutar grupa neće postojati u slučaju da ispitanici unutar svoje grupe imaju potpuno iste rezultate, odnosno kada su $s_{A1}=s_{A2}=s_{A3}=0$. U tom slučaju bi međugrupna variranja trebalo deliti nulom, a deljenje nulom nema adekvatno rešenje, odnosno rezultat deljenja će težiti beskonačnosti (Czajko, 2020). Otuda će u tabeli u apletu u slučaju nepostojanja unutargrupnih variranja, u ćeliji u kojoj bi trebalo da se nalazi vrednost F testa, stajati oznaka za beskonačno ∞ .

2.4 Statističko zaključivanje

Dobijene vrednosti F testova iz primera govore o odnosu međugrupnog i unutargrupnog varijabiliteta koji je ishod *jednog* istraživanja. Međutim, ishod jednog istraživanja ne govori sam po sebi o tome kakvi bi bili ishodi merenja na drugim uzorcima, čak i ako bi ti uzorci bili sličnih karakteristika kao onaj u istraživanju. Kako zaključiti o drugim događajima koji bi se javili u čitavoj populaciji događaja na osnovu događaja u pojedinačnom uzorku, odnosno kako izbeći *zamke induktivnog zaključivanja*, osnovni je problem u filozofiji statistike. Različiti statistički pristupi predlažu različite postupke za rešenje ovog problema. Relativno široko prihvaćen pristup, koji najvećim delom potiče iz Fišerove „kuhinje“, o opšte važećim ili budućim pravilnostima zaključuje tako što dobijeni rezultat posmatra u kontekstu *relativne verovatnoće* da se javi. Ovaj način statističkog zaključivanja inkorporiran je u aplet [Linija](#).

2.4.1 P za probability

Malo slovo p u tabeli desno u apletu [Linija](#) potiče od oznake za verovatnoću (engl. *probability*). Verovatnoća p prikazana u apletu zasniva se na *ponavljanjima događaja*. Analogno ponovljenom bacanju novčića da bi se utvrdila verovatnoća da će novčić pasti na pismo ili glavu, ovde bi bilo potrebno mnogo ponavljanja merenja istih varijabli na isti način, tj. mnogo istraživanja u kojima bi se koristile iste mere i uzorci iste veličine da bi se utvrdila relativna frekvencija slučajeva u kojima bi se dobila određena vrednost *test statistika* – statističkog testa dobijenog na podacima iz uzorka. Takvih ponavljanja u najvećem broju istraživanja koja se u praksi sprovode nema, već postoji rezultat samo jednog istraživanja koji je predmet konkretne analize. Otuda se o verovatnoći kao relativnoj učestalosti najčešće zaključuje na osnovu *pretpostavljenih statističkih distribucija uzoraka*, koje predstavljaju teorijske učestalosti dobijanja vrednosti statistika pod određenim uslovima. Za većinu statističkih distribucija ti uslovi su: 1) da je formiraju rezultati velikog broja testiranja sprovedeni na uzorcima koji su u svakom testiranju *iste veličine* i 2) koji su *uzeti iz iste populacije*, tako da distribucija odgovara stanju da razlike u populaciji nema, odnosno da efekta nema. Zaključivanje o aritmetičkim sredinama uzoraka na osnovu standardne greške, opisano u odeljku 2.2.3.2, zasniva se na sličnoj logici.

2.4.2 F distribucija

Distribuciju F odnosa koja bi se dobila ponavljanjem merenja na uzorcima iste veličine uzetim iz iste populacije definisali su autori koji su dali glavni doprinos u osmišljavanju F testa: Ronald Fišer i Džorž Snedekor. Distribucija se, analogno testu, naziva *F distribucija*.

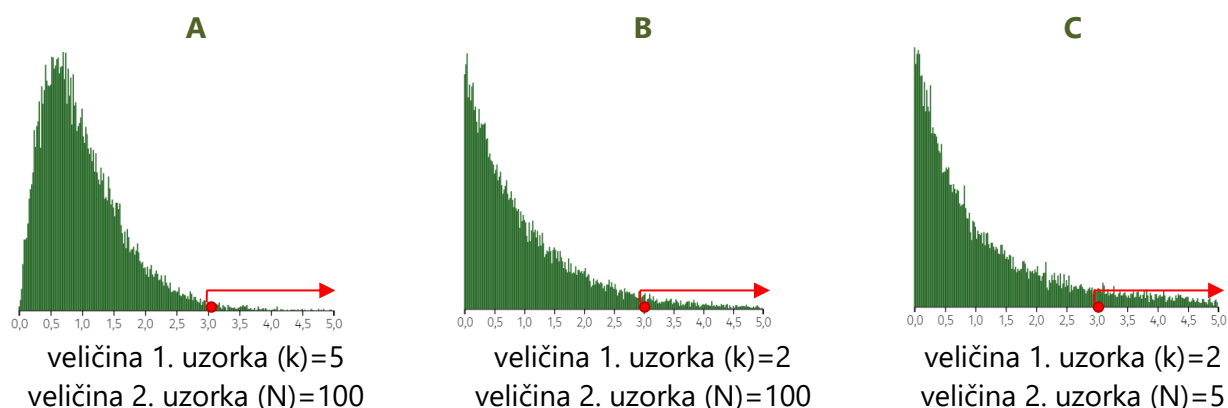
F distribucija izgleda kao normalna distribucija kojoj je neki šaljivdžija stao na desni kraj, onaj na kome su visoke vrednosti, dok ona pokušava da se otrgne (kao na ilustraciji na slici 2.5). Naime, pod pretpostavkom da razlike nema, najveći broj testiranja će rezultovati vrednostima 0 (nepostojanje međugrupnih variranja) ili 1 (unutargrupna variranja su jednaka međugrupnim). Negativne vrednosti F statistika, koje bi se nalazile na levom polu distribucije, nisu moguće jer varijanse, kao ni njihov količnik, ne mogu imati negativnu vrednost. Više vrednosti testa su retke i nalaze se na desnom kraju („repu“) distribucije – ako se u populaciji grupe ne razlikuju malo je verovatno da će podaci omogućiti visoku vrednost testa, te je distribucija *manje ili više zakrivljena* u desno.



Slika 2.5. Ilustracija F distribucije

2.4.2.1 Zakrivljenost F distribucije i karakteristike uzorka

Formulacija „manje ili više zakrivljena“ iz prethodne rečenice upućuje na to da oblik F distribucije u izvesnoj meri varira. F distribucije različite zakrivljenosti mogu se generisati u apletu [Fišer-Snedekorova F](#) iz knjige *Primena tehnika vizualizacije u bazičnoj statistici* (Pajić, 2020), variranjem pokazatelja od kojih zakošenost zavisi. U apletu možete uočiti da su ti pokazatelji *veličina 1. uzorka* i *veličina 2. uzorka*, odnosno da se teorijski određena distribucija modifikuje zavisno od karakteristika konkretnog istraživanja, za čije testiranje rezultata se distribucija koristi. Veličina 1. uzorka označava broj jedinica merenja u brojiocu F odnosa (odnosno *broj grupa*), a veličina 2. uzorka broj jedinica merenja u njegovom imeniocu (odnosno *ukupan broj ispitanika*). Setite se da su te vrednosti „utkane“ u brojeve stepeni slobode između (df_b) i unutar (df_w) grupa. Primeri generisanih distribucija za različite brojeve grupa (k) i ispitanika (N) prikazani su na graficima A, B i C na slici 2.6.



Slika 2.6. F distribucije različite zakošenosti

Zadatak 2.7. Analizirajte prikazane generisane distribucije i/ili distribucije na graficima A, B i C i zaključite o odnosu...

1) zakrivljenosti distribucija i stepena slobode (odnosno zakrivljenosti distribucija i broja merenja i broja grupa)

2) zakrivljenosti distribucije i proporcije slučajeva pod distribucijom ispod određenih F vrednosti, koje su na graficima označene crvenim strelicama.

1) Razlike u prikazanim graficima upućuju na to da istraživanjima sa manje ispitanika i manje grupa odgovaraju distribucije koje su *zakrivljenije*. Najizrazitije zakrivljena je distribucija C, koja predstavlja pretpostavljenu učestalost F statistika, dobijenih na merenjima sprovedenim na malom broju ispitanika ($N_C=5$), i raspoređenih u mali broj grupa ($k_C=2$). U odnosu na nju nešto manje je zakrivljena distribucija B koja pokazuje teorijsku učestalost F statistika dobijenih na istom broju grupa ($k_B=2$), ali većem broju ispitanika ($N_B=100$). Distribucija A, koja odgovara istom ukupnom broju merenja kao distribucija B ($N_A=100$), ali i većem broju grupa ($k_A=5$), još manje je zakrivljena.

2) Oblik distribucije određuje proporciju slučajeva ispod ili iznad pojedinačnih vrednosti na x -osi. U primeru prikazanih distribucija to je proporcija uzoraka u ukupnom broju ponovljenih testiranja u kojima bi se dobile F vrednosti jednake i više – ili jednake i niže – od vrednosti dobijene u konkretnom testiranju. Najizraženije razlike u proporcijama slučajeva u distribucijama A, B i C su na njihovim desnim krajevima, u oblastima relativno visokih F vrednosti. Kao primer, crvenim strelicama usmerenim nadesno označeni su delovi distribucija u kojima se nalaze vrednosti *jednake ili više* od relativno retke vrednosti $F=3,00$. Udeo uzoraka u kojima bi se kao rezultat testiranja dobile F vrednosti jednake ili više od nje, veći je u istraživanjima sprovedenim sa manje merenja (primer C), nego u istraživanjima sprovedenim sa više merenja (primeri A i B). Ovo upućuje na pravilnost koja važi u statističkim testiranjima generalno: u istraživanjima sprovedenim na malim uzorcima nije toliko retko i neočekivano dobijanje i relativno viših vrednosti statističkih testova i koeficijenata.

Kako je prikazano u zadatku 2.7, rezultati testiranja u kojima bi se dobila određena F vrednost ili pak vrednosti više od nje, nalaze se u delu distribucije koji se prostire od određene vrednosti na x -osi do njenog desnog kraja. Udeo ovakvih slučajeva u ukupnoj distribuciji mogućih vrednosti koje bi se dobile ponovljenim testiranjima predstavlja njihovu *relativnu učestalost*, u značenju *učestalosti u odnosu na druge moguće ishode*. U okviru *frekvencionističkog statističkog pristupa* ove relativne učestalosti vrednosti statistika interpretiraju se kao njihove *relativne verovatnoće* (npr. Hájek, 2019; Mayo & Cox, 2006). Vrednost p iz apleta je takva verovatnoća.

2.4.3 P sa obe strane ogledala

Interpretacija verovatnoće podataka predstavljena p vrednošću uslovljena je karakteristikama distribucije koja joj je u osnovi. Prva je da važi uz pretpostavku velikog broja ponovljenih

testiranja uzoraka koji su iste veličine. Druga je ta da distribucija reflektuje pretpostavku o fenomenu u populaciji – u ovom slučaju o razlikama između grupa. Ta pretpostavka je najčešće, kao u opisanoj F distribuciji, da razlike nema. U kontekstu ovakve pretpostavke, p vrednost označava verovatnoću dobijanja određene ili ekstremnije vrednosti statistika *pod pretpostavkom da razlike u populaciji nema*.

2.4.3.1 Niske p vrednosti

Zadatak 2.8. *Koliko iznosi verovatnoća da će se ispitivanjem razlika između 3 grupe u koje je razvrstano 150 ispitanika dobiti F vrednost jednaka ili viša od približno 5,66? Interpretirajte verovatnoću podataka u kontekstu pretpostavke da razlike ne postoje.*

Vrednost $F_{(2,147)} \approx 5,66$ dobijena je za grafik u apletu postavljen kao u vežbi 2.2 ili u primeru A iz zadatka 1, u kome su aritmetičke sredine grupa relativno različite i iznose $M_{A1}=18$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$. Verovatnoća da se dobije takva ili viša vrednost testa, pod pretpostavkom da se grupe ne razlikuju, veoma je niska i iznosi $p \leq 0,01$, što znači da bi se u manje od 1% testiranih uzoraka dobila vrednost $F \approx 5,66$ ili veća.

No, kako odrediti kada su podaci dovoljno malo verovatni da bi se moglo smatrati da se ne mogu objasniti pretpostavkom o nepostojanju fenomena? Dva su moguća načina da se odgovori na ovo pitanje. Prvi je da se dobijena p vrednost uporedi sa nekom unapred određenom vrednošću, pri čemu su te vrednosti najčešće 0,01 ili 0,05. Ove vrednosti su određene neformalnim konsenzusom naučno-statističke zajednice, a rezultat poređenja je binarna odluka - *da li* pretpostavka da razlike nema zadovoljavajuće objašnjava podatke *ili ne*. Ovakav način zaključivanja je i Fišer predlagao u svojim ranim radovima (Fisher, 1935; prema Box, 1980). Drugi način je da se navede tačna p vrednost, čime se odgovara *koliko* je dobijeni rezultat verovatan. Ovaj način zaključivanja, koji je Fišer predlagao u kasnijim radovima (Fisher, 1956; prema Gigerenzer et al., 2004), nešto prihvatljivijim smatraju i savremeni kritičari interpretacije rezultata testiranja na osnovu p vrednosti (npr. Wasserstein, Schirm & Lazar, 2019). Naime, navođenjem tačne p vrednosti izbegava se prisilna podela rezultata na „značajne” i „neznačajne” i njihovo razvrstavanje u različite kategorije čak i kada su razlike u p vrednostima veoma male (npr. $p=0,04$ i $p=0,06$ kada je referentna vrednost $p=0,05$). Time se ostavlja mogućnost čitaocu da sam zaključi o tome koliko se istraživani fenomen „oteo” od nulte vrednosti, odnosno koliko je daleko od nje. Ovakav način je odabran za prikazivanje p vrednosti u apletu.

Budući da je u posmatranom primeru dobijeni rezultat veoma daleko od nulte vrednosti, moguće je doneti određen zaključak o istraživanom fenomenu: na osnovu analiziranih podataka pretpostavka o nepostojanju razlika bi se mogla *odbaciti*.

Ali šta se nalazi sa druge strane odbacivanja pretpostavke o nepostojanju razlika? Ukoliko podaci nisu dovoljno verovatni pod pretpostavljenom distribucijom, da li su verovatniji pod nekom drugom i kojom? Intuitivan odgovor na ovo pitanje bi bio da je to pretpostavka alternativna postavljenoj – da razlika postoji, jer niske p vrednosti odgovaraju većim F odnosima i izraženijim razlikama. Međutim, opisan način statističkog testiranja ne nudi preciznije informacije o tome kolika je ta razlika i koja je verovatnoća njenog dobijanja. Naime, kada je podatak o verovatnoći predstavljen p vrednošću, uslovljen je pretpostavljenom distribucijom, i na osnovu njega se ne može zaključiti o verovatnoći podataka pod nekom drugom distribucijom. Drugim rečima, sa druge strane pretpostavke o nepostojanju razlika nalazi se veoma „zamagljena“, nejasna pretpostavka o postojanju razlika.

2.4.3.2 Visoke p vrednosti

Vežba 2.3. *Variranje p vrednosti*

Varirajte pokazatelje u apletu [Linija](#) tako da povećate p vrednost. Interpretirajte dobijeni rezultat u kontekstu verovatnoće da ne postoji razlika između grupa.

Kako je pokazano u zadatku 2.7, više p vrednosti, odnosno veće verovatnoće javljanja imaju niže F vrednosti, koje zauzimaju najveći deo distribucije prostirući se od njenog levog kraja do zone retkih visokih vrednosti na desnom kraju. Niža F vrednost u apletu se može postići: a) „približavanjem“ aritmetičkih sredina, čime se smanjuju međugrupna variranja, i/ili b) povećanjem intervala poverenja, čime se povećavaju unutargrupna variranja. Pored toga, u zadatku 2.7 je pokazano da se viša p vrednost može dobiti i za nepromenjenu F vrednost, ukoliko je merenje sprovedeno na manjem uzorku. U apletu se ovo može simulirati smanjenjem vrednosti na skali koja pokazuje veličinu uzorka, usled čega se smanjuju i veličine kružića koji predstavljaju aritmetičke sredine. Evo primera odabira pokazatelja koji bi rezultovao višom p vrednošću: kada se računa za približno 75 ispitanika raspoređenih u tri grupe čije standardne devijacije su jednake i iznose $s_{A1}=s_{A2}=s_{A3}=8$, a aritmetike sredine iznose $M_{A1}=17$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$, vrednost testa je niža i iznosi približno $F_{(2,87)} \approx 1,73$, dok je p vrednost viša i iznosi približno $p \approx 0,18$.

Viša p vrednost sugeriše da dobijena vrednost statistika nije dovoljno retka da bi se pretpostavka o nepostojanju razlika mogla odbaciti. Međutim, primenjeni način testiranja ne daje odgovor na to da li se ova pretpostavka može *prihvatiti*. Naime, verovatnoća izražena p vrednošću je verovatnoća ne jednog nego „zone podataka“, i označava verovatnoću da se, sem dobijene vrednosti statistika, dobije i *bilo koja vrednost viša od nje* koja bi mogla da upućuje na izraženije razlike između grupa. U nekom narednom, ponovljenom, istraživanju mogla bi da bude dobijena viša, manje verovatna vrednost statistika koja bi sugerisala odbacivanje pretpostavke o nepostojanju razlika.

2.4.3.3 Nulifikacija

Opisani način testiranja postavljen je tako da je njegov najinformativniji ishod da pretpostavka u odnosu na koju se određuje verovatnoća podataka bude odbačena, odnosno *nulifikovana*. Zbog toga se takva pretpostavka naziva *nulta hipoteza* – a ne zbog toga što pretpostavlja da je razlika nula, mada je u opisanom načinu testiranja najčešće tako (Gigerenzer, 2004).

U postupku testiranja kojim se empirijskom proverom hipoteza može samo odbaciti, postoji izvesna sličnost, analogija sa *falsifikacionizmom*, jednim od glavnih pravca u filozofiji nauke u vreme razvoja metoda statističkog testiranja (Lee & Pawitan, 2021; Wilkinson, 2013). Ovo stanovište koje je razvio britanski filozof Karl Popper (Karl Raimund Popper, 1902–1994) proveravanju hipoteza pristupa iz nešto drugačijeg ugla. Prethodno opisan postupak statističkog testiranja hipoteza je *induktivan*, takav da se na osnovu pojedinačnog rezultata dobijenog na uzorku o populaciji zaključuje sa verovatnoćom, dakle uz određenu količinu neizvesnosti. Pristup koji falsifikacionizam predlaže za proveru hipoteza je *deduktivan*, u kome neizvesnost ne postoji jer se specifična empirijska posledica, čija istinitost se proverava, izvodi iz opštije teorije ili hipoteze. Sličnost falsifikacionizma sa opisanim načinom statističkog testiranja ogleda se u odlukama o hipotezi na osnovu istinitosti posledice. Na osnovu ispravnosti posledice izvedene iz nje, hipoteza ne može biti potvrđena, jer se ista posledica može dedukovati i iz neke druge pretpostavke i jer je moguće da, sem nje, postoji neka druga posledica koja ne govori u prilog hipotezi. Evo jednog od brojnih primera koji demonstriraju grešku potvrđivanja premise na osnovu tačnosti posledice (Ristić, 2006). Iz pretpostavke da je $X=2$ može se izvesti posledica da je $X^2=4$. Međutim, ista kvadrirana vrednost X dobija se i ukoliko je $X=-2$, što nije postavljeno kao pretpostavka. Opaženi beli labudovi ne čine tvrdnju da su svi labudovi beli istinitom, ali samo jedan opaženi crni labud može da pokaže da je ta tvrdnja neistinita (npr. Wilkinson, 2013). Shodno tome, hipoteza se ne može do kraja potvrditi, ali se može opovrgnuti, ukoliko se pokaže da je posledica izvedena iz nje neistinita, jer neistinita posledica ne može da sledi iz istinite premise. Uzimajući za osnovu ovu logiku, sa stanovišta falsifikacionizma proces razvoja naučnog znanja sastoji se u odbacivanju hipoteza za koje se pokaže da su neispravne, odnosno njihovim falsifikovanjem i zadržavanjem onih hipoteza koje uspevaju da izdrže strogu proveru.

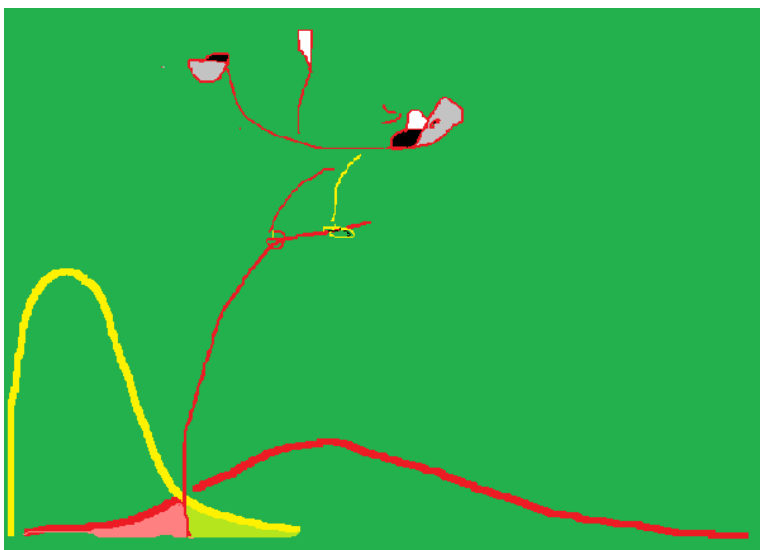
Postoji još jedna razlika u Poperovoj koncepciji opovrgavanja hipoteza u odnosu na opisano statističko testiranje hipoteza. Kod Popera hipoteze koje se stavljaju na proveru treba da su takve da se lako mogu opovrgnuti – malo verovatne, smeje, drske i domišljate, po čemu su sličnije alternativnim nego nultim hipotezama koje najčešće pretpostavljaju da efekta – ispitivane razlike ili povezanosti – nema. Stavljeno u kontekst falsifikacionizma, testiranje nulte hipoteze bilo bi samo prva faza u proveru hipoteze koja omogućava da se utvrdi da je malo verovatno da u populaciji fenomen ne postoji. Tom koraku treba da sledi drugi korak u kome se alternativna hipoteza određuje specifičnije (Wilkinson, 2013). Ovakav korak zastupljen je u nešto drugačijem

postupku statističkog zaključivanja ilustrovanom na slici 2.7, u kome p vrednost ima manji značaj.

2.4.4 Pogled preko tarabe: drugačiji načini

2.4.4.1 Nejman-Pirson ili izbor

Na slici 2.7 ilustrovan je način koji je proistekao iz naučne saradnje dva prijatelja, Jiržija Nejmana (Jerzy Neyman, 1894–1981) i Egona Pirsona (Egon Pearson, 1895–1980). Za razliku od prethodno opisanog, njihov model statističkog testiranja se zasniva na *dve* distribucije verovatnoća koje odražavaju pretpostavke o rezultatima u populaciji. Leva, kao u Fišerovom postupku, predstavlja verovatnoću rezultata pod pretpostavkom da razlike nema. Distribucija koja „beži” u desno predstavlja verovatnoću rezultata pod pretpostavkom da u populaciji postoji sistematski efekat i da je taj efekat određene veličine. Vrednosti testova oko 0 ili 1, koje upućuju na nepostojanje efekta, ovde su moguće ali veoma retke. Češće su vrednosti u oblasti viših rezultata, gde se nalazi i najmanja vrednost efekta koja se može smatrati značajnom, a koja se često naziva *najmanja značajna razlika*. Kako se naveći broj slučajeva od niskih pomera ka višim vrednostima, distribucija je „razvučena” i zbog toga najčešće nešto šira i spljoštenija u odnosu na levu (Nelson, 2016).



Slika 2.7. Ilustracija distribucija nulte i alternativne hipoteze u Nejman-Pirsonovom modelu zaključivanja

Ovakvim modelom je pretpostavka o postojanju efekta specifičnije određena – sa druge strane pretpostavke o nepostojanju efekta nije samo relativno neodređena alternativna tvrdnja da efekat postoji, već tvrdnja da postoji efekat koji je veći od određene vrednosti. Taj manevar

sadrži nešto od poperijansko-deduktivnog smera zaključivanja jer je pretpostavka o najmanje značajnom efektu *a priori* postavljena (Wilkinson, 2013). Važnije od toga, njime se menja ishod testiranja. Umesto odbacivanja hipoteze na osnovu p vrednosti kada su rezultati testiranja malo verovatni pod njom, rezultat ovakvog modela testiranja je odluka o *izboru* između dve hipoteze, koja zavisi od toga pod kojom od njih je dobijeni rezultat testiranja verovatniji. Pritom, rezultat na osnovu koga se odluka prvenstveno donosi jeste vrednost testa, dok p vrednost u ovakvom zaključivanju ima manju ulogu.

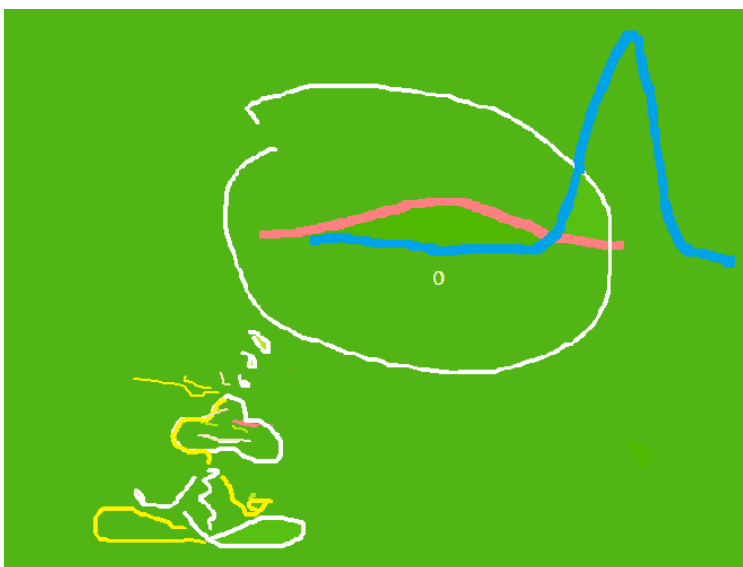
Potencijalni problem u odlučivanju između hipoteza je zona preklapanja distribucija. Na ilustraciji je taj problem rešio skakač s motkom koji je obeležio granicu kojoj distribuciji rezultat treba pripisati. Zavisno od položaja motke više ulevo ili udesno, smanjuju se i povećavaju verovatnoće za dve moguće greške u zaključivanju: grešku pogrešnog prihvatanja nulte hipoteze (zelena zona od motke do kraja leve distribucije) i grešku pogrešnog odbacivanja alternativne hipoteze (ružičasta zona od motke do kraja desne distribucije). Ove dve greške imaju i svoje nazive po kojima su prepoznatljive u udžbenicima statistike: to su „greška lažnog alarma“ (ili greška tipa I) i „greška propuštene prilike“ (ili greška tipa II).

Nejman-Pirsonov način podrazumeva više promišljanja i donošenja odluka pre istraživanja i testiranja. Između ostalog, potrebno je odrediti minimalnu veličinu efekta i verovatnoće za greške koje se, kako autori sugerišu, određuju na osnovu velikog broja realnih ponovljenih testiranja (Perezgonzalez, 2015). Zahtevnost je verovatan razlog što ovakav „pedantniji“ pristup nije istisnuo način koji se zasniva na p vrednostima. Međutim, pojedini koncepti proizašli iz Nejman-Pirsonovog pristupa u zadnje vreme se prepoznaju kao veoma važni za unapređenje istraživačkog postupka. Tome je doprinela *kriza replikabilnosti*, prisutna tokom zadnje decenije kako u psihologiji tako i u drugim naukama, koja je nastala usled uočene relativno niske ponovljivosti rezultata u novim istraživanjima istog fenomena (npr. Cumming, 2014). Jedan od odgovora na krizu bio je taj da se veća pažnja poklanja upotrebi i razvijanju pokazatelja koji mogu da doprinesu povećanju pouzdanosti, uporedivosti i ponovljivosti rezultata istraživanja, a koji su prepoznati u okviru Nejman-Pirsonovog pristupa. Takav pokazatelj je veličina efekta. On je, u odnosu na početno značenje koje je imao u Nejman-Pirsonovom modelu, dodatno razvijen i popularizovan kao pokazatelj izraženosti razlika ili povezanosti. U njegovoj osnovi je vrednost test-statistika, no ta vrednost je standardizovana s obzirom na karakteristike uzorka, kao što su broj merenja i varijabilnost, zbog čega je primenjiv u poređenju rezultata različitih istraživanja. Pored toga, vrste standardnih grešaka i koncepti koji iz njih proizilaze se pokazuju veoma važni za razumevanje uslova za postizanje replikabilnosti koji se tiču posmatranog fenomena i karakteristika uzorka. Među njima je i snaga testa da izbegne grešku „propuštene prilike“ i pokaže efekat ukoliko on postoji.

Uprkos razlikama, Fišerov i Nejman-Pirsonov pristup imaju istu osnovu: oba se zasnivaju na frekvencionističkoj pretpostavci o teorijskim uzoračkim distribucijama. Shodno tome, oba govore o verovatnoći podataka pod hipotezom, a ne o verovatnoći same hipoteze – jer frekvenciju može da ima podatak, a ne hipoteza. Zaokret ka drugačijem postupku, usmerenom na testiranje hipoteza, nudi pristup koji se zasniva na drugačijoj koncepciji verovatnoće. Ovaj pristup takođe u osnovi nema p vrednost, i ilustrovan je na slici 2.8.

2.4.4.2 Bejz ili promena

Pristup statističkom zaključivanju ilustrovan na slici 2.8 na prvi pogled nalikuje Nejman-Pirsonovom pristupu po tome što je takođe predstavljen sa dve distribucije. Međutim, on dolazi iz potpuno drugačijeg „tonaliteta“. Leva distribucija, koju naš junak „zamišlja“, nije teorijska distribucija mogućih rezultata, kao što je slučaj u prethodno opisanim frekvencionističkim rešenjima, niti distribucija podataka dobijenih u aktuelnom istraživanju. Distribucija odražava njegovu ličnu pretpostavku, *subjektivnu uverenost* o verovatnoći određenih rezultata pre dobijanja samih rezultata, koja se zasniva na njegovom prethodnom iskustvu, promišljanju o fenomenu ili poznavanju rezultata ranijih istraživanja. U oblik ove distribucije koja *prethodi* podacima (lat. *prior*) utkana je pretpostavka o vrednostima koje bi se dobile pod nultom i alternativnom hipotezom: visina distribucije u vrednosti 0 predstavlja verovatnoću da efekta u populaciji nema, dok ukupna površina pod distribucijom predstavlja raspored vrednosti pod alternativnim pretpostavljenim modelom (van Doorn et al., 2021). Naš mislilac sa ilustracije je veoma oprezan u svojoj pretpostavci – on blago favorizuje nultu vrednost u odnosu na ostale moguće vrednosti parametra, koje su gotovo ujednačenih verovatnoća. Drugim rečima, njegova pretpostavka sa sobom nosi priličan stepen neizvesnosti.



Slika 2.8. Ilustracija distribucija prethodne i naknadne verovatnoće u bejzijanskom zaključivanju

U desnoj distribuciji neizvesnost je manja – na njoj postoji izraženiji „pik“, odnosno koncentracija rezultata na određenoj vrednosti. Većoj informativnosti doprinelo je znanje o tome šta govore podaci iz sprovedenog istraživanja. U prikazanom primeru podaci pokazuju postojanje efekta, usled čega je distribucija „najgušća“ u vrednosti većoj od nule. Zbog toga se promenio i odnos verovatnoća suparničkih hipoteza u modelu, „pretežući“ sa nulte na stranu alternativne hipoteze o efektu određene veličine. Oblik i položaj ove *naknadne* distribucije (lat. *posterior*) uslovljeni su podacima, ali i prethodnom pretpostavkom o verovatnoći hipoteza u modelu. Na primer, ukoliko je prethodna uverenost na strani postojanja malog, nultog efekta, posterior će takođe pokazati da visoke vrednosti efekta nisu mnogo verovatne, čak i ako podaci dobijeni u istraživanju ukazuju na njih, sugerišući da je dobijanje većeg efekta samo u jednom konkretnom istraživanju od manjeg značaja. Prethodna pretpostavka utiče i na informativnost zaključka. Kao u Poperovom falsifikacionizmu, određenije hipoteze, čije alternative su malo verovatne, imaju veću vrednost za zaključivanje – rezultovaće šiljastijim posterior distribucijama i zaključcima sa manje neizvesnosti (Marsman & Wagenmakers, 2017). Uključivanje prethodne subjektivne verovatnoće zagovornici ovog pravca ističu kao njegovu vrednu prednost, jer ona u proces statističkog zaključivanja unosi pretpostavku istraživača i ranija znanja o fenomenu kao bitne elemente naučnog saznanja (König & van de Schoot, 2018).

Za razliku od klasičnog, frekvencionističkog pristupa, u kojem su podaci manje ili više verovatni s obzirom na pretpostavljenu hipotezu, u opisanom pristupu manje ili više su verovatne *hipoteze* o rezultatima. O njima najpre postoji subjektivna uverenost pre poznavanja podataka, a zatim uverenost kada su poznati podaci. Ovo je još jedna prednost koju naglašavaju zagovornici ovog pristupa, ističući da je znanje o verovatnoći hipoteza, a ne podataka, izvorna, osnovna težnja istraživača (Geigerenzer, 2004). Kako se verovatnoća hipoteza menja zavisno od određenih uslova – podataka i prethodne verovatnoće hipoteza, pristup se naziva *bejzijanski*, po engleskom statističaru, filozofu i teologu Tomasu Bejzu (Thomas Bayes, 1701–1761) koji je još u XVIII veku objasnio koncept uslovne verovatnoće.

Drugačija logika u odnosu na široko zastupljenu frekvencionističku, potreba da se uloži trud da se adekvatno odredi prethodna verovatnoća i veća računarska zahtevnost, neke su od „nelagoda“ koje bejzijanski pristup nosi sa sobom (npr. Kadane, 1995 i van de Schoot et al., 2014), usled kojih je njegova zastupljenost u ukupnom korpusu naučnih istraživanja i naučnog znanja relativno mala. Ipak, primetan je izvestan porast primene bejzijanskog pristupa u istraživanjima, pa i u istraživanjima psiholoških fenomena (Jevremov & Pajić, 2023).

2.5 Posle testiranja ili povratak podacima

Različiti načini statističkog zaključivanja, opisani u prethodnim odeljcima, nude donekle različite verzije odgovora na isto pitanje – da li se određene grupe entiteta razlikuju. U kontekstu

ispitivanja razlika u uspešnosti na testu između tri grupe učenika koji preferiraju različite stilove učenja, zaključivanje na osnovu p vrednosti, koje je prikazano u apletu [Linija](#), pokazalo bi da li su opažene razlike u njihovoj uspešnosti dovoljno velike da odbace početnu pretpostavku da razlike nema. Zaključivanjem na osnovu Nejman-Pirsonog pristupa donela bi se odluka da li je na osnovu podataka verovatnije da se učenici različitog kognitivnog stila razlikuju u uspešnosti sa određenim intenzitetom te razlike, ili da se ne razlikuju. Bejzijanski pristup bi pokazao kako podaci menjaju verovatnoće pretpostavki o razlikama između grupa postavljenih pre testiranja.

No, bez obzira na drugačiji kontekst, odgovor koji nudi svaki od opisanih načina zaključivanja odnosi se na razlike između svih analiziranih grupa *zajedno*. Kada je grupa više od dve, kako je u primeru u apletu, opisani načini testiranja ne daju odgovor o tome koje razlike između pojedinačnih grupa se mogu smatrati značajnim – da li je vizuelni „tip“ učenika uspešniji od tekstualnog, vizuelni od kinestetičkog, tekstualni od kinestetičkog. Da bi se dobio odgovor na ovo pitanje potrebno je primeniti testiranje kojim bi se ispitale razlike između parova od po dve grupe. Ovakva testiranja imaju istu logiku kao i F test – i ona stavljaju u odnos međugrupna i unutargrupna variranja, odnosno razliku između aritmetičkih sredina i grešku. Takav princip ima i t test koji je količnik razlike između dve aritmetičke sredine, koja predstavlja međugrupna variranja, i standardne greške njihovih razlika, koja predstavlja unutargrupna variranja, odnosno grešku (za podsećanje pogledajte [Pajić, 2020](#)).

Višestruko testiranje, međutim, nosi sa sobom veću verovatnoću da se kao rezultat testiranja značajnom pokaže neka razlika koja to nije, odnosno da se pogrešno oglasi alarm koji signalizira postojanje efekta. Verovatnoća za grešku ove vrste zavisi od odabranog nivoa značajnosti, odnosno proporcije slučajeva u distribuciji pod nultom hipotezom koji se smatraju dovoljno retkim da se na osnovu njih ova hipoteza može odbaciti. Ta proporcija je uobičajeno $\alpha=0,05$, pri čemu je verovatnoća da nećemo pogrešno odbaciti istinitu nultu hipotezu $1-0,05=0,95$. Međutim, kada se sprovodi više poređenja, verovatnoća da neće doći do greške je proizvod ovih verovatnoća u svakom pojedinačnom testiranju. Na primer, kada se sprovede tri poređenja, kao što bi bilo potrebno u primeru u apletu, verovatnoća da testiranja neće rezultovati greškom je manja i iznosi $0,95^3=0,86$, dok je rizik da ćemo dobiti bar jedan lažno pozitivan rezultat povećan i iznosi $1-0,86=0,14$. Ukoliko bi se nacrt iz apleta proširio za još jednu grupu ispitanika, na primer uključivanjem grupe studenata koji preferiraju auditivni način učenja, bilo bi potrebno sprovesti šest poređenja. U tom slučaju verovatnoća ishoda testiranja bez greške bila bi još manja i iznosila bi $0,95^6=0,73$, a verovatnoća za grešku u bar jednom testiranju bi se povećala na čak $1-0,73=0,27$ (Herzog et al., 2019).

Metode frekvencionističkog pristupa za smanjivanje greške „lažnog alarma“ pri multiplom testiranju zasnivaju se na manipulisanju kritičnom vrednošću koja predstavlja „prag“ koji je potrebno da vrednost testa dostigne da bi se efekat mogao smatrati značajnim. U Fišerovom

pristupu, u kojem se p vrednost određuje na osnovu proporcije slučajeva pod nulnom hipotezom, slučajevi koji ne idu u prilog nulte hipoteze su još više pomereni na desni kraj „repa“ distribucije, tako da je potrebna još viša vrednost testa i niža p vrednost da bi razlika bila interpretirana kao značajna (slika 2.6). Na slici 2.7, koja ilustruje Nejman-Pirsonov pristup, „prečka“ koja deli zone odluke - koju od hipoteza rezultat podržava - bila bi pomerenjena udesno. U tom slučaju bi bilo potrebno da vrednost testa „preskoči“ još veću kritičnu vrednost kako bi na osnovu njega bila odabrana hipoteza alternativna nultoj – ona koja pretpostavlja da postoji efekat određene veličine. Ovakva postrožavanja se postižu primenom korekcija u testiranju parova razlika, među kojima je Bonferoni korekcija (Bonferroni), kojom se prethodno određeni nivo značajnosti deli brojem poređenja kako bi se smanjio – npr. za tri poređenja $\alpha=0,05/3=0,017$ (Herzog et al., 2019). Nešto drugačiji način se zasniva na tome da se u testove, koji se primenjuju nakon testiranja ukupnih razlika, „ugrađuju“ postupci kojima se smanjuje verovatnoća da se proglasi značajnom razlika koja to nije. I ovi postupci se takođe većinom zasnivaju na postrožavanju kritičnih vrednosti. Testovi se nazivaju *post-hoc* testovi (od latinskog značenja „posle događaja“) i razlikuju se s obzirom na strogost u izbegavanju da pokažu da razlika postoji ukoliko je u stvarnosti nema i, u suprotnom smeru, snazi da pokažu razliku ukoliko zaista postoji (Westfall, 1997).

Dok frekvencionistički pristup poseduje paletu metoda za kontrolu greške pri multiplom testiranju, metodi kontrole ove greške u bezzijanskoj statistici su tek u razvoju. Kako se zaključivanje u bezzijanskoj statistici ne zasniva na p vrednostima i kritičnim vrednostima, ovaj pristup traga za rešenjima koja odgovaraju njegovoj logici promene uverenja na osnovu podataka. Rešenja se mahom zasnivaju na tome da se odredi isti odnos prethodnih verovatnoća za nepostojanje i postojanje efekta za sva poređenja. Jedan od tih načina u osnovi ima nešto stariju ideju da se prethodna verovatnoća (da nema razlike) sa vrednosti 0 pomeri na vrednost 0,5, i takvom drži konstantnom za sva poređenja (de Jong, 2019; Westfall et al., 1997). „Pomeranje“ pozicije prethodne (prior) distribucije donekle bi se moglo uporediti sa korekcijama koje se primenjuju u frekvencionističkoj statistici, a na slici 2.8 ono bi odgovaralo pomeranju najučestalijih vrednosti ružičaste distribucije ka plavoj distribuciji, smanjujući šansu podacima da pokažu promenu.

U problemu multiplog testiranja ogleda se potreba za promišljanjem u izboru statističkih postupaka i testova, od kojih u mnogome zavisi oblikovanje naučnog znanja. Kako navode Kucuk i saradnici (2016, p. 346), *statistika je gramatika nauke*. Njeno ispravno korišćenje omogućava da jezikom nauke govorimo gramatički ispravno.

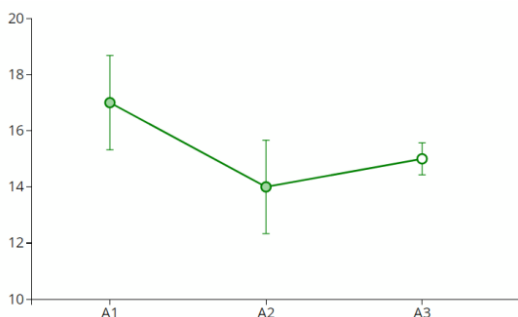
2.6 Razigrane linije ili (ne)homogenost varijansi

U prethodnim vežbama i zadacima linije greške prikazane na linijskom grafiku su bile jednakih, ili približno jednakih dužina za srednje vrednosti svih grupa. Tako predstavljeni podaci pokazuju da su merenja sprovedena na posmatranim grupama ujednačenih varijabilnosti, odnosno da su njihove *varijanse homogene*. Na primer, ujednačene varijanse grupa će biti predstavljene na grafiku u apletu [Linija](#) gde su aritmetičke sredine grupa $M_{A1}=17$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$, njihove veličine jednake i iznose $N_A=N_B=N_C=50$, pri čemu su i standardne devijacije grupa jednake i iznose $s_{A1}=s_{A2}=s_{A3}=6$. Pri ovakvim podacima veličine međugrupnih i unutargrupnih varijansi bi iznosile $MS_b \approx 114,00$ i $MS_w \approx 36,73$, a testiranje razlika bi rezultovalo (približnim) vrednostima $F_{(2,147)} \approx 3,10$ i $p \approx 0,05$. Oslanjajući se na nivo značajnosti $\alpha=0,05$, rezultat bi bio tik „uz granicu” odluke da se tri grupe učenika koje karakterišu različiti stilovi učenja ne razlikuju s obzirom na uspešnost na testu.

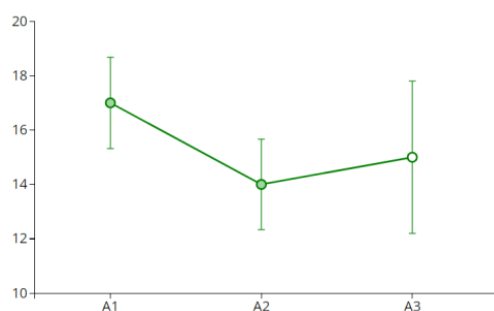
Vežba 2.4. Linije greške različitih dužina u apletu [Linija](#)

Postavite grafik tako da su aritmetičke sredine grupa $M_{A1}=17$, $M_{A2}=14$ i $M_{A3}=15$ i da su njihove veličine jednake i iznose $N_A=N_B=N_C=50$, kao u opisanom primeru. Neka su standardne devijacije u grupama A1 i A2 jednake i neka iznose $s_{A1}=s_{A2}=6$, a u grupi A3 smanjite standardnu devijaciju na $s_{A3}=2$, a zatim je povećavajte do $s_{A3}=10$. Posmatrajte kako promena varijabilnosti rezultata merenja u jednoj od grupa utiče na rezultate testiranja.

Grafici koji bi se dobili pri ovakvim zadatim vrednostima izgledali bi približno kao na slikama 2.9a i 2.9b.



Slika 2.9a. Smanjena varijabilnost u jednoj od grupa



Slika 2.9b. Povećana varijabilnost u jednoj od grupa

Smanjenjem variranja u jednoj od grupa smanjuje se ukupna unutargrupna varijansa, usled čega vrednost F testa raste, dok se p vrednost smanjuje. U slučaju kada je $s_{A3}=2$, dobijaju se vrednosti $F_{(2,147)} \approx 5,25$ i $p \approx 0,01$, uz $MS_b \approx 114$, i $MS_w \approx 21,60$. Iako se prosečne vrednosti postignuća učenika nisu promenile, rezultat sada „preteže” ka zaključku da se grupe razlikuju po uspešnosti.

Povećanjem variranja u jednoj od grupa povećava se ukupna unutargrupna varijansa, te se vrednost F testa smanjuje, dok se p vrednost povećava. U slučaju kada je $s_{A3}=10$, rezultati testiranja su približno $F_{(2,147)} \approx 1,41$ i $p \approx 0,25$, uz $MS_b \approx 114,00$ i vrednost $MS_w \approx 80,65$. Rezultat sada „preteže“ ka zaključku da se grupe ne razlikuju u uspešnosti.

Primer iz vežbe 2.4 pokazuje da nehomogenost varijansi grupa deluje slično kao aberantni rezultat na aritmetičku sredinu, pomerajući njenu vrednost ka višoj ili nižoj. Drugačija varijabilnost rezultata merenja u jednoj od grupa može da dovede do drugačijeg ishoda testiranja, koji više nije pouzdan. Otuda je preporučljivo pre primene analize varijanse utvrditi da li su varijanse grupa homogene. Uvid u ovo se može steći vizuelno, na osnovu linija greške, kao u opisanoj vežbi. No, ujednačenost varijansi grupa se može proveriti i statistički testom, a ideju za takav test predložio je američki statističar i genetičar Hauard Levin (Howard Levene, 1914–2003) u radu objavljenom 1960. godine (Levene, 1960). Njegova ideja se sastojala u tome da je test homogenosti varijansi u osnovi F test, kojim bi se takođe testirale razlike između grupa, ali u odnosu na veličine variranja oko njihovih aritmetičkih sredina. U tom slučaju bi vrednosti na zavisnoj varijabli bile apsolutna odstupanja svakog rezultata od aritmetičke sredine njegove grupe. Kasnije su od strane drugih autora razvijani predlozi za izvesne izmene testa kako bi se povećala njegova otpornost na odstupanja od normalnosti distribucija ili nejednake veličine grupa, no originalan Levenov test je i dalje aktuelan, o čemu svedoči i podatak da je njegov rad iz 1960. godine i nakon 60 godina visoko citiran (Gastwirth et al., 2009).

U slučaju da vizuelna inspekcija i test pokažu da varijanse grupa značajno odstupaju od pretpostavljene homogenosti, moguće je da primena analize varijanse za ispitivanje razlika između njihovih aritmetičkih sredina ne bi dala pouzdane rezultate. Pouzdaniji „igrači“ u tom slučaju su testovi koji se ne zasnivaju na pretpostavci da se u populaciji podaci distribuiraju po pravilima normalne distribucije, a koji se najčešće sprovode nad podacima razvrstanim u kategorije ili rangiranim. Takvi testovi su donekle manje senzitivni za suptilne razlike između pojedinačnih ispitanika ili grupa, ali i robusniji na odstupanja distribucija od normalnosti i njihove nejednačenosti. Neki od testova iz ovog repertoara su prošireni medijan test ili Kruskal-Valisov (Kruskal-Wallis) test (Chan & Walmsley, 1997).

Osim primene testova drugačije vrste, mogli bismo se zamisliti i o uzrocima nehomogenosti varijansi. Različita distribucija odgovora u jednoj ili nekolicini grupa u odnosu na druge grupe može da bude posledica uticaja drugih varijabli koje u istraživanju nisu uzete u obzir, a u odnosu na koje posmatrane grupe nisu ujednačene. U primeru sa uspešnošću i različitim stilovima učenja, uniformnije ili raspršenije tačno odgovaranje učenika može da bude posledica metoda kojim je grupa podučavana. Moguće je da su učenici iz grupe u kojoj su rezultati relativno slični učili na isti način, iz istih materijala i uz iste instrukcije. Sa druge strane, moguće je da su učenici iz grupa u kojima je varijabilnost odgovora veća učili iz različitih materijala, na različite načine, uz

različita uputstva. U tom slučaju se ne može znati da li rezultat testiranja govori o razlikama u uspešnosti koje su posledica različitih stilova učenja, ili pak nekih drugih varijabli. Uključivanje dodatnih varijabli u analizu moglo bi da rasvetli odnos između grupne pripadnosti i merenog svojstva na nov način. Pritom bi vizuelni prikaz ovakvog odnosa bio donekle složeniji.

2.7 Linije u društvu ili ANOVA u više smerova

2.7.1 Više nezavisnih varijabli

Uključivanjem još jedne nezavisne varijable u analizu varijanse moguće je ispitati uticaje na zavisnu varijablu koji proističu iz dva smera, te se ovakva analiza varijanse naziva *dvosmerna* (engl. *two-way*) – za razliku od analize u kojoj se ispituje uticaj samo jedne nezavisne varijable na zavisnu i koja se naziva *jednosmerna* (engl. *one-way*). Linijski grafik u kome je prikazano dejstvo dve nezavisne varijable na zavisnu možete pogledati odabirom opcije *dvosmerna ANOVA* u desnom uglu apleta [Linija](#).

Slično kao na grafiku na kojem su predstavljeni rezultati analizirani jednosmernom analizom varijanse, na ovom grafiku su na y-osi predstavljeni skorovi na mernoj zavisnoj varijabli – na primer, skorovi na testu znanja iz statistike. Podeoci na x-osi su kategorije jedne nezavisne varijable, odnosno nivoi jednog od dva faktora. U prethodnim primerima, u kojima je opisivana jednosmerna analiza varijanse, ispitivan je uticaj faktora stila učenja (A) sa nivoima stil čitanja-pisanja (A1), kinestetički stil (A2) i vizuelni stil (A3).

Ono što ovaj grafik razlikuje od grafika na kojem su prikazani podaci analizirani jednosmernom analizom varijanse, jesu *dve linije* umesto jedne. Linijama su predstavljeni nivoi drugog faktora u analizi, koji se, analogno oznaci prvog faktora, može označiti slovom B. Na primer, neka je drugi faktor vrsta materijala koji su učenici koristili pri savlađivanju gradiva iz statistike: standardni udžbenik sa tekstom i statičnim graphicima (zeleno linija B1) ili udžbenik u kome je naglasak na vizuelnim apletima kojima student može samostalno da manipulise menjajući podatke i izgled grafika (narandžasta linija B2). Pritom, u svakoj od grupa koju karakteriše određeni kognitivni stil jedan deo učenika je koristio standardni, a drugi deo vizuelno orijentisani udžbenik. Time su učenici u grupe razvrstani s obzirom na tri stila i dva materijala za učenje, tako da je grupa ukupno šest:

A1B1 – grupa koju karakteriše stil učenja čitanjem-pisanjem, a koja je učila koristeći standardni udžbenik

A2B1 – grupa koju karakteriše kinestetički stil učenja, a koja je učila koristeći standardni udžbenik

A3B1 – grupa koju karakteriše vizuelni stil učenja, a koja je učila koristeći standardni udžbenik

A1B2 – grupa koju karakteriše stil učenja čitanjem-pisanjem, a koja je učila koristeći udžbenik sa vizualizacijom

A2B2 – grupa koju karakteriše kinestetički stil učenja, a koja je učila koristeći udžbenik sa vizualizacijom

A3B2 – grupa koju karakteriše vizuelni stil učenja, a koja je učila koristeći udžbenik sa vizualizacijom

Šema rasporeda u grupe je predstavljena u tabeli 2.1, u kojoj su u redovima prikazani nivoi faktora B, a u kolonama nivoi faktora A. U ćelijama tabele predstavljene su predložene vrednosti aritmetičkih sredina grupa, nastalih kombinacijom nivoa faktora, dok su u ćelijama na marginama tabele vrednosti aritmetičkih sredina pojedinačnih nivoa faktora (M_A i M_B), računate za podatke u kojima je broj ispitanika u svim grupama i nivoima jednak.

Tabela 2.1

Faktori, nivoi faktora i aritmetičke sredine

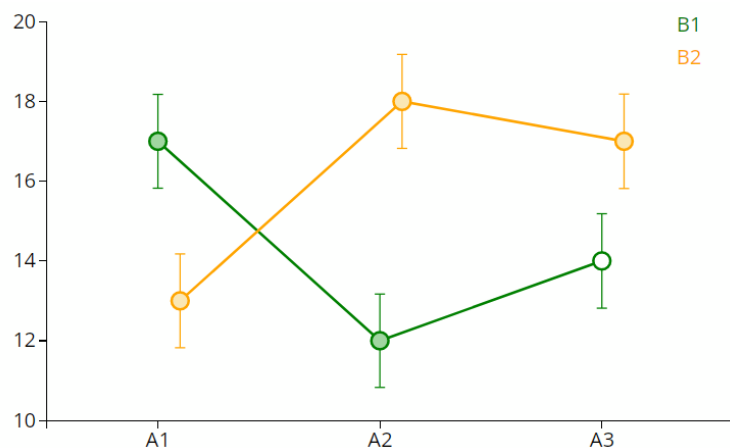
		STIL UČENJA (A)			M_B
		čitanje-pisanje (A1)	kinestetički (A2)	vizuelni (A3)	
METOD UČENJA (B)	standardni (B1)	$M_{A1B1}=17,0$	$M_{A2B1}=12,0$	$M_{A3B1}=14,0$	$M_{B1}=14,3$
	vizualizacija (B2)	$M_{A2B1}=13,0$	$M_{A2B2}=18,0$	$M_{A3B2}=17,0$	$M_{B1}=16,0$
M_A		$M_{A1}=15,0$	$M_{A2}=15,0$	$M_{A3}=15,5$	

Vežba 2.5. Konstruisanje grafika sa dve linije u apletu [Linija](#)

Pomeranjem kružića-tačaka na grafiku postavite aritmetičke sredine grupa tako da odgovaraju vrednostima u tabeli 2.1. Postavite veličine i varijabilnosti grupa tako da su jednake i iznose približno $N_{A1B1}=N_{A2B1}=N_{A3B1}=N_{A1B2}=N_{A2B2}=N_{A3B2}=100$ i $s_{A1B1}=s_{A2B1}=s_{A3B1}=s_{A1B2}=s_{A2B2}=s_{A3B2}=6$.

Interpretirajte odnos između varijabli prikazan na grafiku.

Dobijeni grafik bi približno izgledao kao na slici 2.10.



Slika 2.10. Uticaj dve nezavisne varijable na zavisnu – primer podataka iz tabele 2.1

Odnos između varijabli prikazan linijama na prvi pogled deluje ponešto složen. Ono što prvo privlači pažnju na grafiku jeste to da se linije presecaju, što upućuje na „unakrsno“ delovanje nezavisnih varijabli: učenici koji se služe istim stilom učenja razlikuju se s obzirom na uspešnost, zavisno od metoda učenja koji su koristili. U ovom primeru je pretpostavljeno da su učenici koji preferiraju stil čitanja-pisanja i koji su učili iz standardnog udžbenika uspešniji od učenika koje karakteriše isti stil učenja, a koji su učili iz vizuelno bogatijeg i zahtevnijeg udžbenika. Sa druge strane, među učenicima koje karakteriše kinestetički i vizuelni stil bili su uspešniji oni koji su gradivo usvajali uz vizuelne aplete. Ovakav rezultat bi odgovarao pretpostavci o kongruentnosti stila i metoda učenja (npr. Murphy et al., 2004). Vizuelno bogatiji udžbenik obiluje sadržajima koji upravo odgovaraju onim učenicima koji znanje stiču i zadržavaju koristeći vizualizaciju. Takođe, zbog mogućnosti interaktivnog delovanja takav udžbenik više odgovara i kinestetički usmerenim učenicima, kojima se znanja bolje utiskuju ukoliko imaju mogućnost za praktične aktivnosti. Sa druge strane, moguće je da bi standardni udžbenik nešto više odgovarao učenicima koji se dominantno oslanjaju na čitanje teksta i zapisivanje beleški.

Pored udruženog delovanja nezavisnih varijabli, grafik otkriva kakvo je njihovo samostalno delovanje na zavisnu varijablu. Takvo delovanje se može uočiti na osnovu razlika između modaliteta jedne nezavisne promenljive (A1, A2 i A3), i odvojeno od njih, na osnovu razlika između modaliteta druge nezavisne promenljive (B1 i B2). Ukoliko se zanemari podatak o korišćenom materijalu, rezultati učenika koje karakterišu različiti stilovi učenja se ne razlikuju mnogo – sve tri grupe su u proseku osvojile približno 15 bodova. Na grafiku bi kružići, koji bi predstavljali aritmetičke sredine grupa sa različitim stilom učenja, bili pozicionirani između kružića koji predstavljaju aritmetičke sredine njihovih podgrupa – one koja je učila na standardni način (B1) i one koja je učila uz vizualizaciju (B2). Takvi kružići bi za sva tri stila bili na približno istoj visini, postavljeni u gotovo horizontalnoj liniji. Ovakav rezultat bi odgovarao prethodnim nalazima o nepovezanosti stila učenja i uspeha u statistici (Rautopuro & Väisänen, 2003). Sa

druge strane, ukoliko se zanemare stilovi učenja, učenici koji su koristili udžbenik bogatiji vizualizacijom, postigli su više skorove u odnosu na one koji su koristili standardni udžbenik. Ovo se, osim na osnovu vrednosti aritmetičkih sredina, može videti i na osnovu višeg prosečnog nivoa linije B2 u odnosu na B1. Čak je i grupa koju karakteriše stil čitanja-pisanja, manje uspešna uz korišćenje vizualizacije, uz vizuelni materijal postigla bolji rezultat nego što su grupe sa drugačijim stilom učenja uz standardni udžbenik. Ovaj pretpostavljeni rezultat odražava veru autora u vrednost vizuelnih materijala u nastavi statistike.

Kao na grafiku kojim se prikazuju rezultati jednosmerne analize varijanse, i na ovom grafiku su prikazane linije greške, namenjene predstavljanju variranja u rezultatima koja nisu posledica dejstva nezavisnih varijabli nego individualnih razlika ispitanika unutar grupa, a koja se tretiraju kao greška u proceni aritmetičkih sredina. Kao u primeru sa jednom nezavisnom varijablom, i na ovom grafiku njihovo produženje ili skraćivanje dovodi do toga da razlike između aritmetičkih sredina postanu manje ili više izražene. Kako su u ovom primeru standardne devijacije i broj merenja jednaki za sve grupe, i linije greške su jednake dužine. Kao u jednosmernoj analizi varijanse, veličina unutargrupnih variranja se numerički može izraziti unutargrupnom varijansom, kao suma kvadriranih odstupanja pojedinačnih rezultata od aritmetičke sredine njihovih grupa, pri čemu grupa ima onoliko koliko je različitih kombinacija nivoa merenja nezavisnih varijabli, odnosno koliko ima kružića na grafiku – u ovom primeru šest. Formulom izražena vrednost unutargrupnih variranja je:

$$\text{varijansa unutar grupa} = \frac{\sum (X - M_g)^2}{N - jk} = \frac{SS_w}{df_w} = MS_w$$

– gde su M_g – aritmetičke sredine grupa nastalih kombinacijom nivoa nezavisnih promenljivih, N – ukupan broj ispitanika, j – broj nivoa nezavisne promenljive A, k – broj nivoa nezavisne promenljive B. Oznake SS , df i MS imaju identično značenje kao kod jednosmerne analize varijanse – sume kvadrata, stepeni slobode i srednji kvadrat.

Stavljanjem u odnos unutargrupne varijanse sa međugrupnim variranjima pokazuje se koliki je efekat nezavisne promenljive na zavisnu. Međutim, dve nezavisne varijable u analizi proizvode ne jedan, nego tri moguća efekta međugrupnih variranja. Na te efekte su ukazali rezultati predstavljeni u početnom grafiku.

2.7.2 Putanje i susretanja

2.7.2.1 Jedan smer

Efekat stila učenja koji ovaj faktor ostvaruje nezavisno od materijala za učenje je njegov *glavni efekat* (engl. *main effect*). Kako je faktor u ovom primeru označen slovom A, može se nazvati *glavni efekat faktora A*. Ispoljava se u razlikama u rezultatima na zavisnoj varijabli između nivoa ovog faktora, te će biti to izraženiji što su veće razlike u visini nivoa A1, A2 i A3, a kraće linije greške, odnosno što je veća razlika između aritmetičkih sredina nivoa faktora A i manja unutargrupna varijansa.

2.7.2.2 Drugi smer

Glavni efekat faktora materijala za učenje je onaj koji ovaj faktor ostvaruje nezavisno od faktora stila učenja. Ispoljava se u razlikama između nivoa faktora označenog slovom B, te se može nazvati *glavni efekat faktora B*. Razmaknutije tj. odvojenije linije B1 i B2 i kraće linije greške pokazivaće veći efekat, što će biti praćeno većom razlikom između aritmetičkih sredina nivoa faktora B i manjim unutargrupnim variranjima.

2.7.2.3 Raskrsnica

Efekat koji faktori stila učenja i materijala za učenje ostvaruju udruženim delovanjem ispoljava se u variranjima između aritmetičkih sredina grupa nastalih kombinovanjem nivoa faktora A i B. Takva variranja pokazuju da se efekat jedne nezavisne varijable menja zavisno od nivoa druge nezavisne varijable, te da je delovanje nezavisnih varijabli uzajamno, unakrsno ili interaktivno, zbog čega se ovaj efekat naziva *interaktivni efekat faktora A i B* (engl. *interaction effect*), i označava sa $A \times B$. Efekat će biti to izraženiji što su manje razlike između aritmetičkih sredina unutar nivoa pojedinačnih faktora A i B, a što su veće razlike između aritmetičkih sredina kombinacija nivoa faktora A i B. Grafički, interaktivni efekat je predstavljen linijama koje su ukrštene, presecaju se.

Dok se glavni efekti mogu registrovati i analizama u koje je uključen samo jedan faktor, efekat interakcije je ekskluzivnost analize u koju je uključeno više faktora. Variranja u rezultatima koja se mogu pripisati interaktivnim dejstvu faktora su ona koja se ne mogu objasniti njihovim glavnim dejstvima. Ovu logiku sadrži u sebi i formula za F test za interaktivni efekat kada se računa u slučaju *balansiranih* nacrta istraživanja, kada je broj ispitanika u svim kombinacijama nivoa nezavisnih promenljivih jednak:

$$F_{A \times B} = \frac{MS_{A \times B}}{MS_w} = \frac{\frac{SS_{A \times B}}{df_{A \times B}}}{MS_w} = \frac{\frac{SS_b - SS_A - SS_B}{(r-1)(k-1)}}{MS_w}$$

– pri čemu su SS_b odstupanja aritmetičkih sredina kombinovanih nivoa nezavisnih promenljivih (M_g) od zajedničke aritmetičke sredine (M_t), a b u indeksu je oznaka za *između grupa* (*between groups*):

$$SS_b = \sum n(M_g - M_t)^2$$

Izraz $(r-1)(k-1)$, proizvod broja nivoa nezavisnih promenljivih umanjene za jedan, predstavlja broj stepeni slobode kojim se dele variranja objašnjena interaktivnim efektom.

2.7.3 I, II, III... kako varijansu razlažeš ti?

Dva glavna efekta, jedan efekat interakcije i nesistematska variranja „sastojci” su analize koja ima za cilj raščlanjavanje ukupne varijanse rezultata sa ciljem da se objasni uticaj dve nezavisne varijable na zavisnu. Rečnikom analize varijanse, variranja u rezultatima, izražena sumama kvadrata, čine četiri komponente:

- SS_A – variranja koja se mogu objasniti glavnim dejstvom faktora A
- SS_B – variranja koja se mogu objasniti glavnim dejstvom faktora B
- $SS_{A \times B}$ – variranja koja se mogu objasniti interaktivnim dejstvom faktora A i B
- $SS_{greška}$ – nesistematska variranja.

Jedan veoma pojednostavljen način da se predstave izvori variranja u podacima je kružni dijagram na slici 2.11.

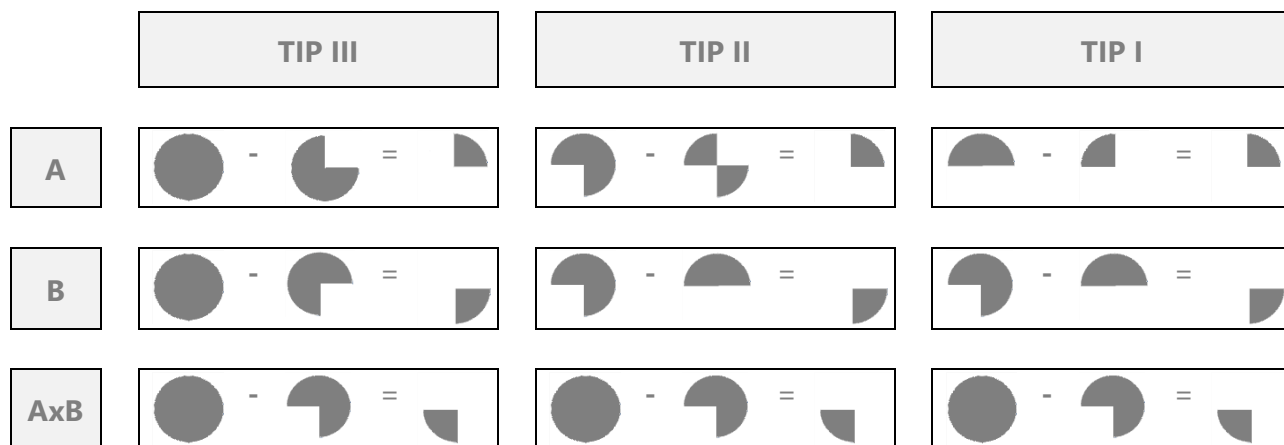


Slika 2.11. Sume kvadrata u dvosmernoj analizi varijanse: jednaki udeli

U primeru na slici 2.11 svakoj od suma kvadrata pripisana je po četvrtina variranja tako da su komponente jednakih veličina. Međutim, treba imati na umu da rezultati stvarnih istraživanja najčešće pokazuju različiti udeo pojedinih faktora u ukupnim variranjima. U prikazanom primeru u vežbi 2.5 najveći udeo u ukupnim variranjima imali bi interakcija faktora AxB i faktor B. Takođe, ilustracija pretpostavlja da su, kao u jednosmernoj analizi varijanse, ukupna variranja u potpunosti iscrpljena njenim delovima – što u analizi sa više nezavisnih promenljivih ponekad nije slučaj.

Deo variranja koji čini greška može se predstaviti odstupanjima pojedinačnih rezultata od aritmetičkih sredina grupa kojima pripadaju, kao što je pokazano formulom u odeljku 2.7.1. Deo variranja koji čini interakciju može se predstaviti razlikama između aritmetičkih sredina grupa nastalih kombinovanjem nivoa nezavisnih promenljivih, pri čemu su to one razlike koje se ne mogu objasniti glavnim efektima. Ova variranja su, za slučaj balansiranih nacrta, prikazana formulom u odeljku 2.7.2.3. Variranja koja se mogu pripisati glavnim efektima slede logiku jednosmerne analize varijanse: to su variranja između aritmetičkih sredina nivoa pojedinačnih faktora (npr. M_{B1} i M_{B2}). Međutim, zavisno od toga koji efekti su uključeni u analizu i kojim redosledom, postoje različiti načini da se preraspodeli varijansa koja se može pripisati glavnim efektima. Ovi različiti načini mogu da daju donekle različite rezultate kada su nacrti istraživanja *nebalansirani*, odnosno kada broj ispitanika u svim kombinacijama nivoa nezavisnih promenljivih nije jednak.

Počev od 1930-ih godina i Franka Jejsa (Frank Yates, 1902–1994), Fišerovog mlađeg saradnika na Rotamsted institutu, predlagani su različiti metodi da se izračunaju sume kvadrata glavnih efekata. Različiti autori su za srodne metode koristili različite nazive, među kojima se kao najčešći ustalio naziv *tipovi suma kvadrata* uz oznaku rimskim brojevima I, II... (Smith & Cribbie, 2014). Logika nekoliko najčešće korišćenih tipova suma kvadrata ilustrovana je na slici 2.12.



Slika 2.12. Ilustracija različitih tipova suma kvadrata (III, II i I)

Na ilustraciji su, krugovima i njihovim isečcima, predstavljeni izvori varijacija u podacima. Prikaz uključuje izvesna pojednostavljenja kako bi se postigla veća jasnoća i preglednost. Kao na slici 2.11, pun krug predstavlja ukupna variranja, a izvori variranja zauzimaju jednak udeo u njemu – po četvrtina za efekat A, efekat B i interakciju $A \times B$. Četvrta četvrtina je varijansa greške, čije mesto je u gornjem levom uglu.

Ilustracije tipova suma kvadrata na slici 2.12 donekle slede logiku zadataka iz jednostavnog figuralnog testa, u kojima je odnos između prve dve figure „minus“, a rešenje je razlika u oblicima dve figure. Na primer, u tipu sume kvadrata označene sa III, od punog kruga se oduzima krug iz koga je „isečen“ jedan efekat, a njihova razlika je isečeni deo kruga koji upravo taj efekat predstavlja. U prvom redu, označenom sa A, od punog kruga oduzima se krug iz koga je isečeno mesto na kome se nalazi efekat faktora A, a rezultat je isečak koji odgovara poziciji faktora A – gornja desna četvrtina kruga. Ilustracija pokazuje da su, u svetlu ovog tipa sume kvadrata, variranja koja se mogu objasniti faktorom A ona koja predstavljaju razliku između ukupnih variranja i preostalih variranja kada se faktor A izostavi. I ostali efekti, B i $A \times B$, računaju se na sličan način, u svetlu svih drugih efekata, tako da je umanjnik za sva tri efekta pun krug, dok se iseći umanjitelja i razlike „rotiraju“ u smeru kretanja kazaljke na satu, od pozicije faktora A do interakcije.

Elegantan i lako razumljiv, ovaj način računanja suma kvadrata je veoma čest, i u statističkim programima neretko odabran kao unapred zadat. Uključenje interakcije u račun svakog od glavnih efekata donosi mu izvesne specifičnosti. Prvo, u ovom metodu kombinovanje nivoa faktora, karakteristično za interakciju, ima uticaj i na logiku procene glavnih efekata. Veličine variranja između nivoa pojedinačnih faktora, koja se dobijaju ovim postupkom, u velikoj meri su slična onima koja bi se dobila na osnovu variranja marginalnih aritmetičkih sredina dobijenih kao prosek aritmetičkih sredina kombinacija nivoa faktora, pri čemu nije uzet u obzir različit broj ispitanika u pojedinačnim kombinacijama (Smith & Cribbie, 2014). Takvim postupkom veće grupe nisu u prednosti da više utiču na rezultat, te bi se ovaj metod mogao smatrati nešto pogodnijim za nacрте u kojima se podrazumeva balansiran odnos u veličinama grupa u populaciji, uprkos tome što takav odnos nije odslikan u uzorku na kome se analiza sprovodi. Drugo, procena veličine svakog od efekata na osnovu veličina ostalih mogućih efekata daje različitim efektima jednak nivo važnosti pri interpretaciji. Ovaj metod računanja suma kvadrata primenjen je u apletu.

Tipovi suma kvadrata I i II računaju interakciju na isti način kao tip III, na šta ukazuje isti obrazac odnosa između oblika u redu označenom sa $A \times B$ – od ukupnih variranja izuzimaju se sva ostala variranja osim onih koja se mogu objasniti jedino interakcijom. Međutim, za razliku od tipa III, tipovi I i II pri računu glavnih efekata ne uzimaju u obzir variranja objašnjena interakcijom. Dodatna razlika je da oba tipa podrazumevaju to da se variranja između nivoa faktora

procenjuju tako da uzimaju u obzir veličine podgrupa. Otuda će, u slučaju nebalansiranih nacrti, grupe sa većim brojem ispitanika imati veći uticaj na rezultate (Smith & Cribbie, 2014). Zbog toga njihova primena u ovakvim slučajevima zahteva oprez pri interpretaciji i promišljanje da li obrazac učestalosti slučajeva u uzorku odražava stanje u populaciji.

Primena tipa II sume kvadrata na račun glavnih efekata ilustrovana je na sledeći način. Na mestu umanjenika nalazi se nepotpun krug, iz koga je isključen deo koji se odnosi na interakciju. Od variranja koja takav krug predstavlja, a to su ona koja produkuju efekat A, efekat B i grešku, oduzimaju se ona variranja koja produkuju efekat B i grešku, da bi se pokazalo kolika su variranja koja izaziva faktor A. Ista logika važi za račun faktora B – i on se posmatra samo u svetlu faktora A i greške. Drugim rečima, glavni efekti se „prilagođavaju“ jedan drugom, a ne moguće postojećem efektu interakcije. Isključujući interakciju iz računa glavnih efekata, ovaj metod ima potencijalno veću snagu da pokaže da su glavni efekti značajni, što može da stvori razliku u odnosu na rezultate dobijene tip III metodom (Langsrud, 2003). Pored toga, ovaj način saobrazan je *principu marginalnosti*, po kome su glavni efekti marginalni, što znači da su nižeg reda u odnosu na efekat interakcije, i da bi se trebalo posvetiti njihovoj interpretaciji tek ukoliko interakcija nije značajna (Heathcote & Matzke, 2021). U tom svetlu, ovaj metod je opravdaniji u odnosu na tip III onda kada se prethodno pokaže ili pretpostavi da efekta interakcije nema ili da nije od značaja za interpretaciju rezultata istraživanja.

Tip I sume kvadrata objašnjava ukupnu varijansu „korak po korak“. U prvom koraku testira se glavni efekat faktora A samo u odnosu na grešku, kao da je u pitanju račun jednosmerne analize varijanse. U sledećem koraku testira se glavni efekat faktora B u odnosu na grešku i faktor A, da bi se pokazalo koliki je ostatak od variranja neobjašnjen faktorom A – kao što je slučaj u tipu II. U svakom narednom koraku i umanjenik i umanjilac se šire za četvrtinu, ukupna varijansa se objašnjava sa sve više dodatih efekata, te se ovaj metod naziva još i *sekvencijalni*. Pritom, prvi uvedeni faktor ima mogućnost da objasni najviše varijanse, jer će njemu biti pripisana varijansa koju zajedno sa njim objašnjava i drugouvedeni faktor. Drugouvedenom faktoru je udeo u ukupnoj varijansi time donekle redukovan. Usled toga ovaj metod može da pokaže različite vrednosti efekata faktora A i B, zavisno od toga kojim redom su uključeni u analizu. Ovo je potencijalni nedostatak ovog metoda, ali i prednost kada je cilj analize procena koji faktor je najuticajniji nezavisno od ostalih, ili kada je cilj analize eksploracija podataka variranjem redosleda uvođenja faktora. Pored toga, jedino ovaj tip sume kvadrata proizvodi sume za glavne faktore, njihovu interakciju i grešku, čiji zbir je jednak ukupnoj sumi kvadrata. S obzirom na to, ilustracija na slici 2.12, u kojoj su ukupna variranja u potpunosti iscrpljena njenim delovima, tačno oslikava jedino ovaj tip sume kvadrata.

Pored ova tri postoji još metoda za račun suma kvadrata, koji su usmereni na rešavanje problema nedostajućih podataka (tipovi IV i V) i/ili testiranja specifično formulisanih hipoteza (tipovi V i VI).

2.7.4 Različite putanje

U apletu [Linija](#) za dvosmernu analizu varijanse, u tabeli desno, u koloni označenoj sa *SS*, prikazane su vrednosti suma kvadrata za svaki od četiri izvora variranja – glavni efekat faktora A, glavni efekat faktora B, interaktivni efekat faktora AxB i grešku. Kao u jednosmernoj analizi varijanse, njihovim deljenjem stepenima slobode (kolona *df*) dobijaju se vrednosti srednjih kvadrata, odnosno varijansi (kolona *MS*). Deljenjem varijansi efekata koji potiču od nezavisnih promenljivih (A, B i AxB) sa varijansom greške, dobijaju se vrednosti F količnici (kolona *F*). F vrednosti i stepeni slobode određuju p vrednosti (kolona *p*), koje ukazuju na značajnost efekata.

U primeru iz vežbe 2.5 značajna su dva od tri moguća efekta: efekat interakcije stila i metoda učenja (AxB) i glavni efekat metoda učenja (B).

Vežba 2.6. „Konstrukcija” različitih efekata u apletu [Linija](#)

Menjanjem pozicija aritmetičkih sredina na grafiku predstavite rezultat koji bi pokazivao:

- a) samo interaktivni efekat*
- b) oba glavna efekta*
- c) samo glavni efekat A*
- d) samo glavni efekat B*
- e) da nijedan sistematski efekat nije značajan*

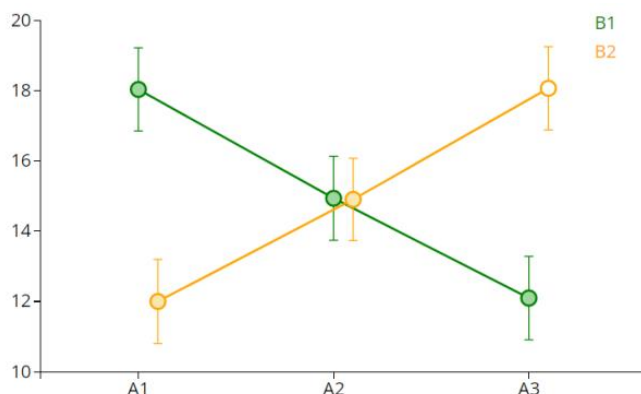
Proverite ispravnost rešenja na osnovu visine F testova i p vrednosti.

Predstavljanje efekata u zadacima od a) do e) donekle podseća na pomeranje linija dok se „ne razmrse”.

- a) samo interaktivni efekat*

Interaktivni efekat faktora A i B grafički se može predstaviti linijama koje se relativno „pravilno” ukrštaju. Da bi se pokazao samo interaktivni bez glavnih efekata, grafik iz vežbe 2.5 je potrebno donekle modifikovati tako da se „eliminiše” glavni efekat materijala iz kog se uči (B), na primer tako što će se u grupi čiji je stil učenja kinestetički, postignuće smanjiti uz udžbenik sa

vizualizacijom (A2B2), a povećati uz standardni udžbenik (A2B1). Jedan od mogućih rezultata prikazan je na slici 2.13.



Slika 2.13. Interaktivni efekat faktora A i B

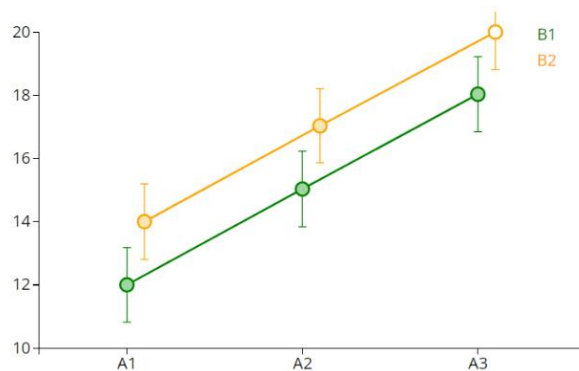
U predloženom primeru aritmetičke sredine kombinacije nivoa faktora imaju vrednosti:

	B1	B2
A1	$M_{A1B1}=18$	$M_{A1B2}=12$
A2	$M_{A2B1}=15$	$M_{A2B2}=15$
A3	$M_{A3B1}=12$	$M_{A3B2}=18$

U primeru se aritmetičke sredine nivoa faktora ne razlikuju i iznose $M_{A1}=M_{A2}=M_{A3}=15$ i $M_{B1}=M_{B2}=15$. Ovakav rezultat pokazuje da se sva variranja na zavisnoj varijabli mogu objasniti isključivo interaktivnim delovanjem nezavisnih varijabli. Pritom, jedna nezavisna varijabla *deluje različito na nivoe druge nezavisne varijable* – predloženi rezultat pokazuje da vizuelni materijal za učenje povećava postignuće na testu kod studenata koji preferiraju vizuelni stil učenja (A3B2), dok postignuće studenata koji preferiraju stil čitanja-pisanja smanjuje (A1B2). Sa druge strane, standardni udžbenik povećava postignuće studenata sa stilom čitanja-pisanja (A1B1), a smanjuje ga kod onih sa vizuelnim stilom (A3B1). Ovakvom grafiku će odgovarati rezultat u tabeli u apletu – da visoku F vrednost i nisku p vrednost ima jedino interaktivni efekat.

b) oba glavna efekta bez interakcije

Da bi se grafički predstavio rezultat u kome ne postoji interakcija, a značajna su oba glavna efekta, linije je potrebno postaviti tako da se ne ukrštaju, da su različitih visina na nivoima A1, A2 i A3, i da su linije B1 i B2 razdvojene. Jedan mogući rezultat predstavljen je na grafiku na slici 2.14, na kojem su linije kose i paralelne.



Slika 2.14. Glavni efekti A i B

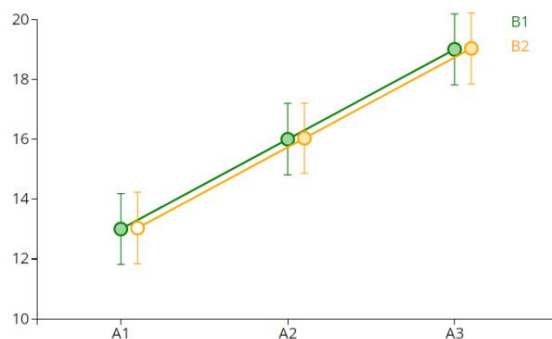
Ovakav grafik pokazivaće aritmetičke sredine kombinacija nivoa faktora koje imaju vrednosti:

	B1	B2
A1	$M_{A1B1}=12$	$M_{A1B2}=14$
A2	$M_{A2B1}=15$	$M_{A2B2}=17$
A3	$M_{A3B1}=18$	$M_{A3B2}=20$

Aritmetičke sredine u primeru su takve da se vrednosti nivoa faktora A međusobno razlikuju, a da se međusobno razlikuju i vrednosti nivoa faktora B. Ovakav pretpostavljeni rezultat pokazuje da su najuspešniji na testu bili studenti koji primenjuju vizuelne tehnike učenja (A3), zatim oni koji imaju kinestetički stil učenja (A2), a da su najmanje uspešni oni sa stilom čitanja-pisanja (A1). No, bez obzira na stil učenja, svi studenti koji su koristili vizuelno bogat udžbenik (B2), bili su uspešniji od onih koji su koristili standardni udžbenik (B1). Paralelne linije odraz su *aditivnog*, odnosno zbirnog delovanja nezavisnih promenljivih, u kome jedna nezavisna promenljiva *deluje jednako na sve nivoe druge nezavisne promenljive* – vizuelni udžbenik za istu vrednost (dva boda) povećava uspešnost u grupama čiji je stil čitanje-pisanje (A1), kinestetički (A2) i vizuelni (A3). Uz ovakav grafik, visoke F vrednosti i niske p vrednosti u tabeli u apletu imaće glavni efekat faktora A i glavni efekat faktora B.

c) samo glavni efekat A

Da bi se grafički pokazao samo glavni efekat faktora A, potrebno je „skinuti“ glavni efekat faktora B iz prethodnog zadatka. Ovo će se postići „priljubljanjem“ linija B1 i B2, kao na slici 2.15.



Slika 2.15. Glavni efekat A

Aritmetičke sredine grupa imale bi vrednosti:

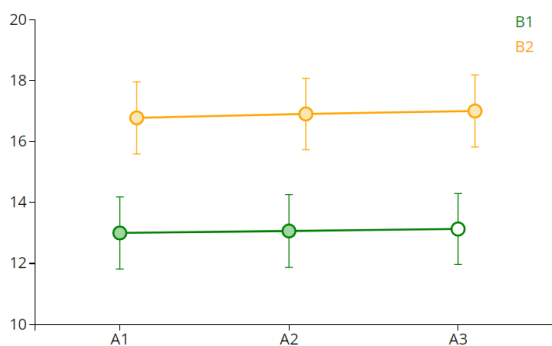
	B1	B2
A1	$M_{A1B1}=13$	$M_{A1B2}=13$
A2	$M_{A2B1}=16$	$M_{A2B2}=16$
A3	$M_{A3B1}=19$	$M_{A3B2}=19$

Vrednosti aritmetičkih sredina u primeru pokazuju da se razlikuju samo nivoi faktora stila učenja (A1, A2 i A3), dok se učenici sa istim stilom učenja ne razlikuju po tome koji materijal za učenje su koristili (B1 ili B2). U tabeli sa rezultatima u apletu jedino će F vrednost računata za faktor A biti nisko verovatna pod pretpostavkom da razlike između njegovih nivoa nema.

Predloženi rezultat odraz je pretpostavke da sklonost vizualizaciji i učenju kroz praktične pokušaje pomažu u savlađivanju statistike. Drugačiji odnos uspešnosti između studenata sa različitim stilom učenja takođe bi pokazivao glavni efekat ovog faktora.

d) samo glavni efekat B

Glavni efekat faktora B, bez glavnog efekta faktora A, može da se prikaže horizontalnim paralelnim linijama B1 i B2, kao na slici 2.16.



Slika 2.16. Glavni efekat faktora B

Aritmetičke sredine u predloženom primeru bi imale vrednosti:

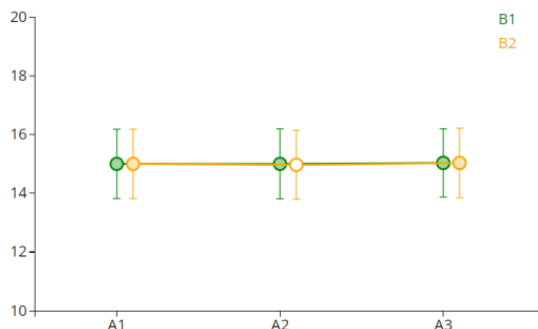
	B1	B2
A1	$M_{A1B1}=13$	$M_{A1B2}=17$
A2	$M_{A2B1}=13$	$M_{A2B2}=17$
A3	$M_{A3B1}=13$	$M_{A3B2}=17$

Vrednosti aritmetičkih sredina pokazuju da su učenici koji su učili iz vizuelno orijentisanog udžbenika (B2) bili uspešniji na testu od učenika koji su učili iz standardnog udžbenika (B1), nezavisno od stila učenja koji koriste (A1, A2 i A3). U tabeli sa rezultatima u apletu, značajnim za interpretaciju pokazaće se samo glavni efekat faktora B.

Predloženi rezultat odraz je vere u vrednost vizuelnih materijala u podučavanju statistike. No i u ovom slučaju bi obrnut rezultat, da su uspešniji studenti koji koriste standardni udžbenik, takođe pokazivao glavni efekat faktora.

e) nijedan efekat nije značajan

Na grafiku koji pokazuje samo ona variranja koja potiču od nesistematskih dejstava, linije bi bile horizontalne i spojene, pokazujući da nema razlike u nivoima A1, A2 i A3, da nema razlike u nivoima B1 i B2, niti u kombinaciji nivoa faktora. Primer ovakvog rezultata je na slici 2.17.



Slika 2.17. Nesistematska variranja

Sve aritmetičke sredine su jednakih vrednosti:

	B1	B2
A1	$M_{A1B1}=15$	$M_{A1B2}=15$
A2	$M_{A2B1}=15$	$M_{A2B2}=15$
A3	$M_{A3B1}=15$	$M_{A3B2}=15$

Jednake vrednosti aritmetičkih sredina pokazuju da su studenti jednako uspešni, bez obzira na stil učenja i materijal za učenje. Rezultati u tabeli u apletu pokazuju da, kada se variranja ne

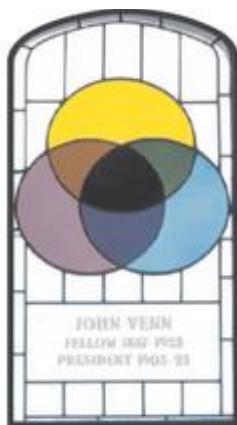
mogu objasniti dejstvom nezavisnih promenljivih, oba glavna i interaktivni efekti zanemarljivih su veličina, dok dominiraju variranja koja potiču od nesistematskih razlika unutar grupa.

(III) VENOVI DIJAGRAMI ili VIŠESTRUKA REGRESIJA

3.1 Igra krugovima

Relacije između varijabli se grafički mogu prikazati na više načina. Verovatno najpoznatiji i najčešće korišćen način je dijagram raspršenja (ili skater dijagram), opisan u odeljku *Kartezije ili korelacija*. „Raspršenje” se na ovom dijagramu odnosi na poziciju rezultata u koordinatnom sistemu čije ose predstavljaju varijable. Vizuelni prikaz raspršenja omogućava uvid u jačinu i smer povezanosti varijabli, ali i u dodatne karakteristike koje na tu povezanost mogu uticati, kao što su linearnost odnosa varijabli, homoskedasticitet ili postojanje aberantnih rezultata. Međutim, s obzirom na to da grafički nije moguće istovremeno prikazati više od tri koordinatne ose, upotreba dijagrama raspršenja je ograničena na prikazivanje odnosa između najviše tri, a najčešće dve varijable.

Za prikazivanje odnosa između većeg broja varijabli pogodna je jedna druga vizuelna metafora (St. Clair, 2000), pozajmljena iz oblasti prikazivanja logičkih relacija između koncepata i sudova. To su Venovi dijagrami, sa kojima se srećemo još u osnovnoj školi, kada se za usvajanje razumevanja relacija između apstraktnih koncepata pripremamo učeći odnose između skupova. Dugujemo ih ljudima širokih oblasti interesovanja i stvaralaštva. Jedan od prvih tvoraca ideje grafičkog prikazivanja skupova bio je poznati švajcarski matematičar, filozof, logičar, fizičar i astronom Leonard Ojler (Leonhard Euler, 1707–1783). Svoj sadašnji izgled i naziv duguju Džonu Venu (John Venn, 1834–1923), engleskom svešteniku, filozofu i profesoru logike, koji je detaljno prikazao njihovu upotrebu u vizualizaciji logičkog zaključivanja u članku objavljenom 1880. godine (Venn, 1880). Dijagrami izgledaju kao zatvorene krive linije, najčešće krugovi, koji se presecaju. Takvi se mogu videti na vitražu trpezarijskog prozora Gonvil i Kiz koledža (Gonville & Caius College) Univerziteta u Kembridžu, gde stoje u znak sećanja na Venu, koji je na ovom koledžu predavao (na slici 3.1). U nekim radovima (npr. Kennedy, 2002) mogu se sresti i pod nazivom „Balentajn dijagrami”, zbog sličnosti sa logoom za Balentajn (Ballantine) pivo.



Slika 3.1. Venovi dijagrami na vitražu Gonvil i Kiz koledža (Edwards, 2006)

U statistici se Venovi dijagrami najčešće upotrebljavaju za prikazivanje odnosa između varijabli u regresionoj analizi, i to najviše u svrhu demonstracije i edukacije. Primena Venovih dijagrama u nastavi statistike bila je čak predmet pojedinih istraživanja, koja su pokazala da studenti bolje razumeju ovu analizu kada je uče koristeći Venove dijagrame (npr. Ip, 2001).

3.2 Regresiona analiza

Regresionom analizom se rezultati na nekoj varijabli objašnjavaju, odnosno opisuju rezultatima na nekim drugim varijablama. Jedna varijabla se može objasniti drugim varijablama ukoliko postoji njihovo zajedničko variranje, odnosno ako su u korelaciji. Tada se, na osnovu rezultata merenja na tim drugim varijablama, sa određenom pouzdanošću može proceniti koliki će biti nečiji rezultat na varijabli koja je predmet interesovanja i pre nego što je izmerena. Sa ovakvim zadatkom psiholog se susreće kada procenjuje buduću uspešnost kandidata u cilju njihove selekcije. Na osnovu podataka, kao što su rezultati na testovima ili uspešnost u prethodnim aktivnostima, on procenjuje koliko će biti uspešni budući učenici u školi, studenti na fakultetu, radnici na određenim radnim mestima, sportisti na takmičenjima. Analiza je primenjiva i u raznim drugim oblastima. U ekonomiji se često koristiti za predviđanje uspešnosti prodaje određenog proizvoda ili za procenu rizika, u medicini za predviđanja stanja pacijenata, a u inženjerstvu za procenu preciznosti mašina (npr. Li et al., 2014). Osim radi predviđanja ishoda, drugim varijablama se neretko opisuju određena svojstva ili osobine kako bi se bolje objasnile i razumele. S obzirom na to da se pretpostavlja da rezultat na varijabli koja se objašnjava zavisi od nekih drugih mera – na primer sposobnosti, osobina ličnosti ili motivacije – ta varijabla se određuje kao zavisna. Ona je takođe i kriterijum, odnosno mera u odnosu na koju se predviđanje vrši, „meta“ koju treba „pogoditi“ drugim varijablama, pa se naziva još i kriterijumska varijabla. Sa druge strane, varijable koje se koriste za njeno predviđanje, odnosno objašnjenje, određuju se kao nezavisne ili prediktorske varijable. Nazivi „kriterijska“ i „prediktorske varijable“ nešto su

češći u nacrtima u kojima ne postoji eksperimentalna manipulacija varijablama (npr. Dunn, 2001; Deviant, 2011). U standardnoj regresionoj analizi i kriterijska i prediktorske varijable su kvantitativne.

Pouzdanost i preciznost predviđanja zavise u prvom redu od toga koliko prediktorska i kriterijska varijabla zajednički variraju, odnosno u kolikoj su korelaciji. Drugim rečima, osnovna mera kvaliteta predviđanja jeste zajednička informacija koju kriterijum deli sa prediktorima. Ovo je pokazano i u odeljku *Kartezije ili korelacija*, gde se u dvodimenzionalnom sistemu formiranjem regresione linije kriterijum predviđa na osnovu jednog prediktora. Međutim, kriterijsku varijablu je često moguće i potrebno objasniti sa više prediktora. Na primer, školski uspeh se može objasniti opštom inteligencijom, ali i različitim oblicima samoprocene i motivacije učenika da uče određeno gradivo i postignu uspeh (Kriegbaum et al., 2018; Spinath et al., 2006; Steinmayr & Spinath, 2009; Weber et al., 2013). U tom slučaju, količina predviđene informacije će zavisiti od toga koliko zavisna varijabla ima zajedničkog sa prediktorima, ali i od toga koliko zajedničkog prediktori imaju među sobom, odnosno od njihovih međusobnih relacija. Prikazivanje ovih relacija između varijabli suština je prikaza regresione analize Venovim dijagramima.

3.3 Venovi dijagrami u regresionoj analizi

Relacije između varijabli Venovim dijagramima je moguće predstaviti na više načina (Bardou et al., 2014; Ip, 2001; Kennedy, 2002; O'Brien, 2018). Prva varijacija je u načinu na koji se predstavlja zajednička informacija. U jednoj varijanti prostor kriterijuma koji se objašnjava predstavlja se pravougaonom pozadinom na kojoj su smešteni objekti koji predstavljaju prediktorske varijable (Ip, 2001). U drugoj, češćoj, sve varijable, i kriterijumska i prediktorske, prikazane su objektima, a zajedničko među njima – njihovim presecima (npr. Kennedy, 2002). Modifikacije su moguće i u karakteristikama samih objekata, njihovog oblika i veličine. Osim krugovima, objekti mogu biti predstavljeni i drugačijim oblicima – ovalima, pravougaonicima ili, pak, trouglovima. Takođe, objekti mogu biti različitih ili istih veličina. Različite veličine objekata najčešće odslikavaju razlike u varijansama varijabli. Varijansa je mera varijabilnosti rezultata merenja, koja je detaljnije predstavljena u odeljku *Linije ili ANOVA*. Istim veličinama svih objekata predstavljaju se varijable čije varijanse su ujednačene nekim od postupaka transformacije sirovih skorova, na primer standardizacijom. S obzirom na to da veličina objekata predstavlja varijansu, veličina njihovog preseka predstavlja kovarijansu, odnosno zajedničko variranje rezultata na varijablama. U slučaju kada su objekti različitih veličina, veličina preseka će zavisiti od vrednosti kovarijanse, ali i od varijansi varijabli, odnosno veličine objekata.

U apletu [Venovi dijagrami](#) varijable su predstavljene krugovima jednakih veličina. To je slučaj u kojem su varijanse varijabli ujednačene standardizacijom, te ukupna varijansa svake od varijabli

iznosi 1. Veličina preseka tako ne zavisi od veličine krugova, što omogućava bolju vizuelnu procenu proporcije zajedničke varijanse varijabli. Osim toga, na ovaj način se na osnovu veličine preseka lakše može proceniti kolika je korelacija između varijabli, jer kovarijansa standardizovanih varijabli odgovara koeficijentu korelacije. Presek krugova predstavlja koeficijent determinacije, odnosno kvadrat koeficijenta jednostavne korelacije (r^2). Na primer, ako se krugovi preklapaju 25%, vrednost koeficijenta determinacije iznosiće $r^2=0,25$, a koeficijenta korelacije $r=0,50$. Ukoliko je jedna od varijabli kriterijum a druga prediktor, ovakav prikaz će pokazivati da se $\frac{1}{4}$ informacija, koje su nam poznate na osnovu rezultata na prediktoru, poklapa sa informacijama koje bi nam bile poznate na osnovu rezultata na kriterijumu, odnosno da je prediktorom objašnjeno $\frac{1}{4}$ variranja u rezultatima na kriterijumu. Sa druge strane, $\frac{3}{4}$ informacija o kriterijumu je ostalo neobjašnjeno.

Ovo je za sada nešto manje od onog što nudi skater dijagram – Venovi dijagrami ne pokazuju smer povezanosti, niti specifičnosti u podacima koje mogu da utiču na visinu koeficijenta korelacije. Prednosti upotrebe Venovih dijagrama vidljive su pri demonstraciji relacija kriterijuma i više od jednog prediktora, odnosno kada se primenjuje *višestruka regresiona analiza*. U višestrukoj regresionoj analizi Venovim dijagramima može se demonstrirati veličina koeficijenta višestruke korelacije, odnosno višestruke determinacije, kao i parcijalnih doprinosa prediktora predviđanju.

3.3.1 Koeficijenti višestruke korelacije i determinacije

Koeficijent višestruke korelacije je pokazatelj jačine povezanosti između jedne varijable i više drugih varijabli. To mogu biti kriterijska i prediktorske varijable, no kriterijumsko-prediktorski odnos varijabli nije nužan uslov za predstavljanje njihovog odnosa ovim koeficijentom. Za razliku od koeficijenta jednostavne korelacije, koji se označava malim latiničnim slovom r , koeficijent višestruke korelacije se označava velikim latiničnim R . Analogno koeficijentu jednostavne korelacije, R^2 predstavlja koeficijent višestruke determinacije, odnosno proporciju varijanse kriterijuma objašnjenu prediktorima.

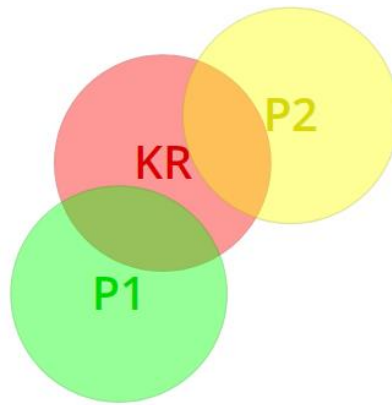
U apletu [Venovi dijagrami](#), crvenim krugom sa oznakom KR predstavljena je kriterijska varijabla, dok su prediktorske varijable predstavljene trima preostalim krugovima u zelenoj, žutoj i plavoj boji sa oznakama P1, P2 i P3. Krugovi se mogu pomerati mišem.

3.3.1.1 Korelacije prediktora i kriterijuma

Vežba 3.1. Dva nekorelisana prediktora u apletu [Venovi dijagrami](#)

Postavite kriterijsku i prediktorsku varijablu P1 tako da njihov presek iznosi približno 25%. Postavite zatim prediktorsku varijablu P2 tako da njen presek sa kriterijskom varijablom takođe iznosi približno 25%, a da se pritom ne preseca sa prvom prediktorskom varijablom.

Ovako predstavljen odnos između varijabli mogao bi da izgleda kao na slici 3.2.



Slika 3.2. Nekorelisani prediktori

Prediktori zajedno objašnjavaju 50% varijanse kriterijuma. Vrednost R^2 prikazana je u donjem desnom uglu apleta. Za ovako predstavljen odnos između varijabli, ona iznosi $R^2=0,50$. Ova vrednost je količnik dela varijanse kriterijuma koji je objašnjen prediktorima i ukupne veličine varijanse kriterijuma. S obzirom na to da su u apletu varijanse varijabli ujednačene i iznose 1, ona je jednaka zbiru determinacija kriterijuma prediktorima: $R^2=0,25+0,25$.

Formulom se ovo može izraziti na sledeći način:

$$R_{KR.P1P2}^2 = r_{KR P1}^2 + r_{KR P2}^2$$

Vrednost koeficijenta višestruke korelacije je kvadratni koren vrednosti koeficijenta višestruke determinacije, a njegova vrednost je takođe predstavljena u donjem desnom uglu apleta. U ovom primeru iznosi $R=0,71$.

$$R_{KR.P1P2} = \sqrt{r_{KR P1}^2 + r_{KR P2}^2}$$

Postavljanjem krugova u određeni odnos grafički smo predstavili jedan *model predviđanja*. Model je obrazac, „muštra“, „kalup“, „recept“ za predviđanje (Lindsey, 1997). Na primer, ovako bi izgledao model predviđanja školskog uspeha na osnovu inteligencije i motivacije u hipotetičkoj situaciji da inteligencija i motivacija nisu u korelaciji i da jednako doprinose objašnjenju prediktora. Prema ovakvom „receptu“, inteligencija i motivacija bi imale istu „težinu“ u

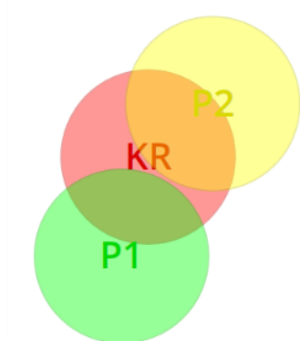
predviđanju, odnosno skorovima na testovima kojima bi ove dve osobine bile merene pridavala bi se jednaka važnost.

Međutim, modeli su neretko odraz realnosti koji je u nekoj meri pojednostavljen (Fried, 2017; Lindsey, 1997). Takav je i model koji smo prethodno konstruisali. U stvarnoj situaciji je malo verovatno da oba odabrana prediktora imaju potpuno jednak uticaj na objašnjenje kriterijuma. Što se tiče inteligencije, motivacije i školskog uspeha, istraživanja pokazuju različite rezultate zavisno od toga koje mere sposobnosti, motivacije i uspeha su korišćene. Kada su u pitanju postignuća darovitih pojedinaca, većina istraživanja u ovoj oblasti pokazuje nešto manji uticaj motivacije nego što je Tomas Edison pretpostavio u svojoj čuvenoj tvrdnji da je genije 1% inspiracije i 99% perspiracije (npr. Lens & Rand, 2000). Pokazano je i da se veličina uticaja pojedinih prediktora razlikuje zavisno od školskog predmeta. Na primer, pojedina istraživanja pokazuju da sposobnosti imaju veći uticaj na uspeh u matematici (Kriegbaum et al., 2015; Moenikia & Zahed-Babelan, 2010), dok motivacija ima značajniju ulogu kada je u pitanju uspeh u nastavi jezika (Weber et al., 2013). Formirajmo stoga modele predviđanja varirajući veličinu doprinosa pojedinih prediktora.

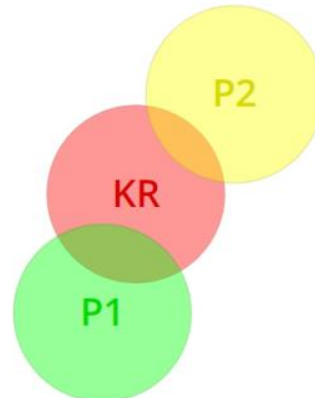
Vežba 3.2. Korelacije dva nekorelisana prediktora i kriterijuma u apletu [Venovi dijagrami](#)

Varirajte veličinu prepokrivanja prediktora i kriterijuma. Povećajte zajedničku varijansu jednog ili oba prediktora sa kriterijumom. Zatim smanjite zajedničku varijansu jednog ili oba prediktora sa kriterijumom. Posmatrajte promenu vrednosti koeficijenta višestruke korelacije i višestruke determinacije.

Rezultati variranja veličine prepokrivanja nekorelisanih prediktora i kriterijuma mogli bi da izgledaju kao na slikama 3.3a i 3.3b.



Slika 3.3a. Više korelacije kriterijuma i nekorelisanih prediktora: $R^2 \approx 0,70$



Slika 3.3b. Niže korelacije kriterijuma i nekorelisanih prediktora: $R^2 \approx 0,30$

Ova vežba pokazuje kako se sa većom količinom zajedničkog između prediktora i kriterijuma povećava i koeficijent višestruke korelacije. To znači da ćemo neki fenomen bolje objasniti

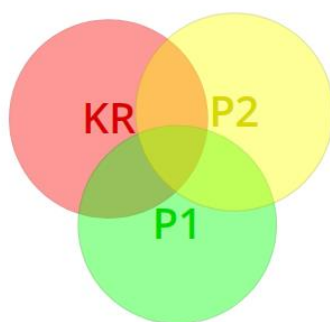
pojavama koje su sa njim snažnije povezane, nego pojavama koje nisu ili su slabo povezane sa njim. Drugim rečima, model predviđanja će biti bolji ukoliko se za predviđanje koriste varijable koje su u višim korelacijama sa kriterijumom. Ovo možemo nazvati *prvim pravilom u predviđanju*.

3.3.1.2 Korelisani prediktori

Vežba 3.3. Dva korelisana prediktora u apletu [Venovi dijagrami](#)

Postavite prediktore P1 i P2 tako da se približno 25% prepokrivaju sa kriterijumom, ali da se i međusobno prepokrivaju. Neka njihovo međusobno prepokrivanje takođe bude oko 25%. Pogledajte kolike su vrednosti koeficijenata višestruke korelacije i determinacije.

Ovako postavljen dijagram izgledao bi približno kao na slici 3.4.



Slika 3.4. Korelisani prediktori

U slučaju korelisanih prediktora, količina objašnjene varijanse kriterijuma manja je u odnosu na prethodnu vežbu, kada su prediktori bili nekorelisani. Ona je umanjena za deo kriterijuma objašnjen obema prediktorima, odnosno za istu informaciju o kriterijumu koju nose i jedan i drugi prediktor. Proporcija objašnjene varijanse kriterijuma sada je racio zbira delova kojima svaki prediktor samostalno objašnjava kriterijum i ukupne varijanse kriterijuma. U računu koeficijenta višestruke determinacije to će biti izraženo na sledeći način:

$$R_{KR.P1P2}^2 = \frac{r_{KR P1}^2 + r_{KR P2}^2 - 2r_{KR P1} \cdot r_{KR P2} \cdot r_{P1 P2}}{1 - r_{P1 P2}^2}$$

U primeru iz vežbe 3.3 koeficijent višestruke determinacije će iznositi približno $R^2=0,33$. Objašnjeno je za 17% manje varijanse kriterijuma nego u slučaju kada prediktori nisu korelisani. Koeficijent višestruke korelacije biće koren ove vrednosti i iznosiće približno $R=0,57$. Formula za njegov račun je:

$$R_{KR.P1P2} = \sqrt{\frac{r_{KR P1}^2 + r_{KR P2}^2 - 2r_{KR P1} \cdot r_{KR P2} \cdot r_{P1 P2}}{1 - r_{P1 P2}^2}}$$

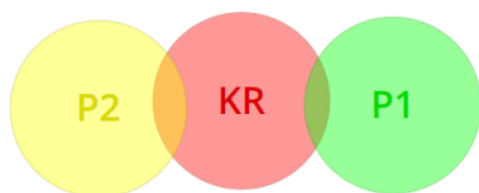
Ovo nas dovodi do *drugog pravila u predviđanju pojava* koje treba istaći: koeficijent višestruke korelacije će biti utoliko veći ukoliko je manja korelacija između prediktora. Odnosno, neki fenomen je bolje objasniti pojavama koje su među sobom različite nego međusobno sličnim pojavama. Od dva modela, u kojima prediktori pojedinačno objašnjavaju jednaku količinu varijanse kriterijuma, model predviđanja u kojima su prediktori međusobno nezavisni bolji je u odnosu na model u kojem su prediktori korelisani.

3.3.1.3 Broj prediktora

Vežba 3.4. Treći prediktor u apletu [Venovi dijagrami](#)

Objašnjenju kriterijuma KR, pored prediktora P1 i P2, dodajte i prediktor P3, tako da je njegov doprinos objašnjenju kriterijuma bar delom samostalan. Posmatrajte kako uključivanje još jednog prediktora utiče na vrednosti koeficijenata višestruke korelacije i determinacije. Razmislite o kvalitetu modela sa više prediktora.

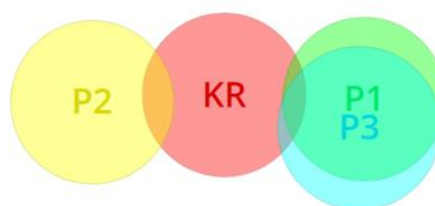
Primeri predviđanja na osnovu dva i tri prediktora predstavljeni su dijagramima na slikama 3.5a i 3.5b. U dijagramu na slici 3.5b treći prediktor P3 dodatno samostalno objašnjava manji deo varijanse kriterijuma KR.



$$R_{kr1.p1p2} \approx 0,40; R^2_{kr1.p1p2} \approx 0,16;$$

$$R^2_{adj} \approx 0,12; p \approx 0,02$$

Slika 3.5a. Dva prediktora



$$R_{kr1.p1p2p3} \approx 0,41; R^2_{kr1.p1p2p3} \approx 0,17;$$

$$R^2_{adj} \approx 0,11; p \approx 0,04$$

Slika 3.5b. Tri prediktora

Ukoliko novi prediktor samostalno doprinosi objašnjenju prediktora, kao na dijagramu na slici 3.5b, vrednost koeficijenata R i R^2 će se povećati jer će porasti i varijansa kriterijuma objašnjena prediktorima. Međutim, to ne znači da je model sa više prediktora nužno bolji. Naime, u kojoj meri se proporcija varijanse kriterijuma objašnjena prediktorima može smatrati značajnom za interpretaciju i ponovljivom u kasnijim istraživanjima, testira se F testom koji, analogno njegovoj primeni u analizi varijanse (vidi *Linije ili ANOVA*), stavlja u odnos varijansu kriterijuma objašnjenu prediktorima (R^2), i varijansu kriterijuma neobjašnjenu prediktorima ($1 - R^2$). Analogno logici

analize varijanse, objašnjeni deo varijanse kriterijuma (R^2) odgovarao bi varijansi objašnjenjima regresionim modelom (MS_{model}). Neobjašnjeni deo variranja u kriterijumu ($1-R^2$) odgovarao bi varijansi greške, koja se po analogiji sa odstupanjima opaženih od predviđenih podataka u jednostavnoj regresiji naziva još i rezidual ($MS_{rezidual}$). Pored toga, F odnos uzima u obzir *broj ispitanika* i *broj prediktora*, kako je izraženo formulom:

$$F_{n-k-1}^k = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k-1}{k} = \frac{MS_{model}}{MS_{rezidual}} \cdot \frac{n-k-1}{k}$$

– gde je n broj ispitanika, dok je k broj prediktora. Broj ispitanika je upravo proporcionalan veličini F testa, što znači da će vrednost testa rasti ako je broj ispitanika veći – kako važi za većinu statističkih testova. U apletu je broj ispitanika konstantan, tako da on nema uticaj na značajnost modela. No broj prediktora, koji je u apletu moguće varirati, obrnuto je proporcionalan vrednosti testa. To znači da će se sa povećanjem broja prediktora vrednost testa smanjiti, a u velikom broju ponovljenih testiranja niža vrednost testa je verovatnija pod pretpostavkom da povezanosti između prediktora i kriterijuma nema. Ova verovatnoća, izražena p vrednošću, predstavljena je u donjem desnom delu apleta. U primeru iz vežbe 3.4 ona će biti viša u modelu sa više prediktora, uprkos nešto višoj proporciji objašnjene varijanse kriterijuma. Iako povećavaju objašnjenost kriterijuma, više prediktora čine model manje značajnim za interpretaciju.

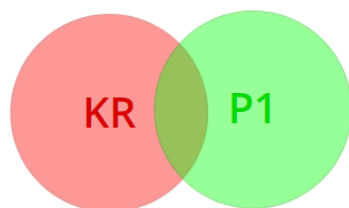
U primeru sa tri prediktora niža će biti vrednost još jednog pokazatelja – korigovanog (engl. *adjusted*) R^2 , koji osim objašnjene varijanse kriterijuma takođe uzima u obzir broj ispitanika i broj prediktora. U donjem desnom uglu apleta nalazi se njegova vrednost, čija formula za računanje je:

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k-1} \right]$$

Vežba 3.5. Jedan i tri prediktora u apletu [Venovi dijagrami](#)

Postavite dijagrame tako da je proporcija objašnjene varijanse sa jednim i sa tri prediktora približno jednaka (na primer 16%). Posmatrajte razlike u p vrednostima i vrednostima korigovanog R^2 .

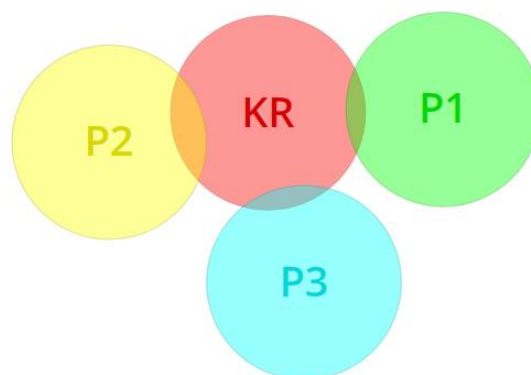
Primer iste količine objašnjene varijanse kriterijuma sa jednim i sa tri prediktora prikazan je na slikama 3.6a i 3.6b. U primeru u kojem je ista proporcija varijanse kriterijuma objašnjena većim brojem prediktora, vrednost korigovanog R^2 je niža, a p vrednost viša.



$$R_{kr1,p1} \approx 0,40; R^2_{kr1,p1} \approx 0,16;$$

$$R^2_{adj} \approx 0,14; p \approx 0,00$$

Slika 3.6a. Jedan prediktor



$$R_{kr1,p1p2p3} \approx 0,40; R^2_{kr1,p1p2p3} \approx 0,16;$$

$$R^2_{adj} \approx 0,10; p \approx 0,04$$

Slika 3.6b. Tri prediktora

Ovde možemo zapaziti i *treće važno pravilo u predviđanju*: sa povećanjem broja prediktora smanjuje se verovatnoća da će predviđanje biti značajno i primenjivo na druge uzorke i merenja. Neki fenomen je bolje objasniti sa manje pojava nego sa više. Drugim rečima, od dva modela u kojima je količina objašnjene varijanse kriterijuma jednaka, biće bolji onaj koji to postiže sa manje varijabli.

3.3.1.4 Princip parsimonije ili *How many angels can dance on the head of the pin?*

Drugo i treće pravilo opisuju regresionu analizu kao „štedljiv“ postupak koji sledi logiku najjednostavnijeg rešenja. Ovo pravilo je poznato kao *princip parsimonije*, koji je, da bi stigao u polje nauke, prešao put iz antičke i srednjovekovne filozofije, menjajući svoj naziv i, donekle, sadržaj. Njegova možda najpopularnija formulacija stigla nam je iz XIV veka u obliku maksime danas poznate kao „Okamova oštrica“. Ovaj period srednjeg veka je bio vreme upliva racionalizma u hrišćansku filozofiju i ekspanzije poletnih sholastičkih rasprava, u kojima se teološkim fenomenima pokušavalo dati racionalno, logički konzistentno objašnjenje. Ovakva objašnjenja su često imala oblik kompleksnih rasprava o empirijski neproverljivim fenomenima, sa velikim brojem posrednih dokaza i premisa. Jedno od takvih pitanja bilo je o prirodi anđela – npr. koliko anđela može u isto vreme da stane na isto mesto, a koje je kroz kasnije igre rečima (*pinheads and needles' points*) dobilo formulaciju *koliko anđela može da stane na vrh igle* (Harrison, 2016). Odgovori na ovakvo pitanje mogli bi sa budu veoma nejasni i raznoliki jer bi zavisili kako od različitih interpretacija samog pitanja postavljenog u formi metafore, tako i od ličnih uverenja o fenomenu na koji se odnosi, a koji je nemoguće proveriti empirijski. Reakcija na ovakve debate bio je poziv na urednije i logički konzistentnije mišljenje, koji je potekao upravo iz redova sholastičara. Viljem od Okama (oko 1300–1349), i sam sholastički filozof, fratar i teolog, ovaj stav, da treba težiti jasnijem i konzistentnijem mišljenju, formulisao je kao tvrdnju da nije

potrebno koristiti više elemenata u objašnjenjima ukoliko to nije neophodno. Posledično, nepotrebne elemente u objašnjenju bi trebalo „odseći, obrijati“.

U nauci Okamova oštrica ima ulogu jedne od smernica u vodiču za vrednovanje teorijskih i metodoloških modela, najčešće u značenju da treba odabrati onaj koji je jednostavniji. Međutim, da bi se princip koji je oblikovan za domen teologije i logike primenio u nauci, potrebno je jasnije određenje bar dva njegova elementa. Prvo, šta je to *jednostavno rešenje* i drugo, *kada kompleksnije rešenje nije neophodno*, odnosno da li je jednostavno rešenje nužno bolje od složenog.

Značenje jednostavnosti rešenja u nauci prisutno je u različitim varijetetima, zavisno od konteksta, naučne oblasti, kao i od toga da li se odnosi na teorijsko objašnjenje ili metodološki pristup. Posebno širok spektar značenja ima u teorijskim objašnjenjima, gde može da označava manje postulata i premisa, primenjivost na više pojava ili empirijsku proverljivost. U društvenim i humanističkim naukama nisu retka objašnjenja u kojima je jednostavnost postignuta tako što je neki složen fenomen objašnjen na osnovu bazičnijih, elementarnijih fenomena ili procesa iz domena prirodnih nauka. U psihologiji su takvi pravci oni koji složene mentalne procese i ponašanje objašnjavaju biološkim, fiziološkim ili, pak, informacionim procesima (Schouten & Looren de Jong, 2007). Zbog svođenja – redukovanja – jedne vrste pojava na pojavu druge vrste ovakvi pravci u objašnjenjima se nazivaju „redukcionistički“. Za razliku od teorijskih, kriterijume jednostavnosti statističkih modela, u koje spadaju i modeli predviđanja, moguće je nešto egzaktnije odrediti. U regresionom modelu jednostavniji modeli bili bi oni sa manje prediktorskih varijabli, ili, pak, oni sa jednostavnijim odnosima između njih. Vizuelno predstavljeno Venovim dijagramima, jednostavno rešenje bi predstavljalo sliku u kojoj kriterijsku varijablu preseca manji broj prediktora koji se uzajamno ne presecaju – kao latice na dečijem crtežu cveta.

Drugo značajno pitanje je da li je jednostavno rešenje (šta god ono bilo) zaista i nužno bolje od složenog. U nauci su poznati primeri da jednostavno rešenje nije uvek najbolje. Na primer, jednostavnost postignuta redukcijom je često kritikovana u smislu da, svodeći kompleksno na jednostavno, zanemaruje značajan deo složene prirode fenomena na koji se odnosi, a termin *redukcionizam* neretko se upotrebljava u negativnom značenju (Schouten & Looren de Jong, 2007). Metaforički rečeno, redukcionizam je rana koju je Okamova oštrica zadala nauci. Slično tome, pojedini autori ukazuju na opasnosti preteranog pojednostavljivanja u statističkim modelima (Wears & Lewis, 1999). Eliminacija značajnih varijabli u ime parsimonije rezultovaće modelom koji loše objašnjava fenomen i ima slabiju prediktivnu moć. Predviđati na osnovu nedovoljno varijabli koje bi objasnile kriterijum, značilo bi predviđati na osnovu nedovoljno informacija, što predviđanje čini nepouzdanim i podložnim većoj grešci. Slično mišljenje izrazili su i naučnici različitih oblasti ekspertize, anketirani u istraživanju koje je sproveo Riš (Riesch,

2010). Većina njih se složila da je svet zapravo mnogo kompleksniji od mnogih objašnjenja i da jednostavnija rešenja ne moraju nužno da odgovaraju stvarnom stanju stvari.

Zašto bi onda naučnik birao jednostavnije rešenje – osim da „ne bi otežavao svoj već inače stresan život birajući komplikovaniju opciju“ (Riesch, 2010, p. 79)? Po mišljenju većine naučnika iz različitih oblasti, anketiranih u istraživanju Riša, odgovor leži u praktičnosti i korisnosti. Na primer, redukcionistička rešenja, iako manjkava, obogatila su nauku za razumevanje znatnog broja pojava, kao i povezanosti pojava različitog eksplanatornog nivoa, bez kojih bi se nauka teško dala zamisliti.

Praktičnost je odgovor i na opravdanost principa parsimonije u regresionoj analizi. Jednostavniji statistički modeli, osim što su lakši za razumevanje, uspešnije se primenjuju u praksi. Na primer, u postupku predviđanja uspešnosti praktičnije je primeniti bateriju sa manje testova jer će testiranje ispitanika verovatno kraće trajati i biti ekonomičnije (Kuppermann & Willits, 2000). Pored toga, postoji i dodatni razlog za oprez pri primeni kompleksnijih statističkih modela. Kompleksniji modeli pre reflektuju idiosinkratične karakteristike seta podataka na kome se zasnivaju, odnosno slučajna variranja i grešku u podacima, nego prirodu fenomena koji bi trebalo da objasne. Usled preterane saobraženosti podacima (engl. *overfit*), takvi modeli se lošije generalizuju na nove slučajeve te su slabije primenjivi u praksi. Ova opasnost je dodatno izražena ako su modeli formirani na uzorcima merenja u kojima je broj ispitanika u odnosu na broj varijabli relativno mali. Pored slabije generabilnosti, takvi modeli imaju i tendenciju da precenjuju visinu koeficijenata višestruke korelacije jer su podložniji slučajnim variranjima, koja mogu da proizvedu visoke pojedinačne korelacije između prediktora i kriterijuma, a od kojih su koeficijenti višestruke korelacije uvek viši. Otuda i korigovani R^2 kao „praktičnija“ mera višestruke povezanosti.

Čini se da je balans jednostavnosti i složenosti, potrebne kompleksnosti i kompleksnosti koja suviše odgovara podacima, smernica za formiranje prediktivnih modela. Ovo bi vizuelno odgovaralo kriterijumu pokrivenom prediktorima koji se ne presecaju, odnosno onima koji imaju što više *parcijalne doprinose predviđanju*.

3.3.2 Parcijalne veze između varijabli

Vežba 3.6. Presek dva kruga u apletu [Venovi dijagrami](#)

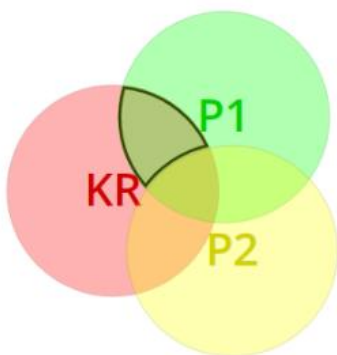
Postavite kriterijsku varijablu KR i prediktorske varijable P1 i P2 tako da prepokrivanje između kriterijske i svake od prediktorskih varijabli iznosi približno 25%, a da se prediktori međusobno ne prekrivaju (kao u vežbi 3.1). Posmatrajte visinu koeficijenata korelacija između varijabli i obeležite na dijagramu prepokrivanja varijabli.

Koeficijenti korelacija između varijabli u modelu prikazani su u tabeli sa desne strane apleta. Koeficijenti jednostavnih korelacija nalaze se u ćelijama ispod glavne dijagonale. U ovom primeru oni će imati vrednosti približno $r=0,50$ za prediktorske i kriterijsku varijablu, a 0,00 za prediktorske varijable. Ispod tabele sa korelacijama nalaze se dva reda kvadratića, čijim se označavanjem mogu naglasiti zajednički delovi varijansi varijabli u dijagramu. Na primer, ukoliko se u prvom redu označi povezanost između varijabli KR i P1, zajednički deo njihove varijanse, odnosno njihov presek, biće naglašen tako što će linija okvira preseka biti podebljana. Ovo se postiže odabirom opcije *prikaži presek* koja se nalaze ispod kvadratića za označavanje varijabli. Opcijom *poništi presek* okvir oko preseka će biti uklonjen.

Vežba 3.7. *Presek dva kruga bez trećeg u apletu [Venovi dijagrami](#)*

*Postavite kriterijsku varijablu P2 tako da je njeno prepoкрivanje i sa kriterijskom, ali i sa prediktorskom varijablom oko 25% (kao u vežbi 3.3). Odaberite varijable KR i P1 u prvom redu polja za selekciju varijabli, varijablu P2 u drugom redu polja za selekciju varijabli, a zatim odaberite opciju *prikaži presek*.*

Na dijagramu će sada biti označen samo deo preseka kriterijske i prediktorske varijable P1, ono „parče“ koje preostaje kada se izuzme – ili odstrani – deo koji zauzima prediktor P2, kao na slici 3.7. Ova količina predstavlja samostalni doprinos prediktorske varijable P1 objašnjenju kriterijuma, odnosno deo njegove povezanosti sa kriterijumom koji preostaje nakon što se *kontrolise* ili *parcijalizuje* efekat ostalih prediktorskih varijabli. Otuda je drugi red polja u kojem se selektuju varijable, čiji efekat se kontrolise, označen sa *parcijalizacija*.

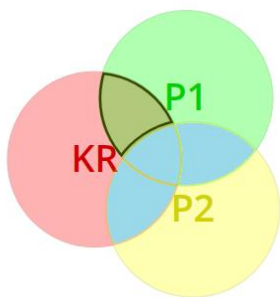


Slika 3.7. Zajednički deo kriterijuma KR i prediktora P1, bez prediktora P2

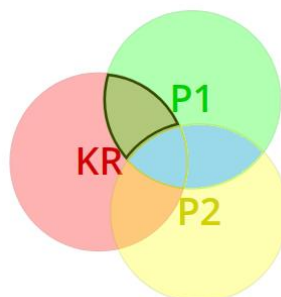
No, šta znači parcijalizovati efekat drugih varijabli? Parcijalizovanje efekta neke varijable se može ilustrovati na sledeći način. Recimo da dijagram formiran u ovoj vežbi predstavlja model kojim se na osnovu dva testa predviđa uspešnost u nekoj aktivnosti. Variranja rezultata na ta dva testa poklapaju se u nekoj meri sa variranjima rezultata na kriterijumu, što omogućava predviđanje rezultata na kriterijumu, ali se u izvesnoj meri poklapaju i variranja na prediktorskim testovima.

Parcijalizovati efekat drugog testa značilo bi pokazati kolika bi bila zajednička variranja prvog testa i kriterijuma kada ne bi bilo njihovih zajedničkih variranja sa drugim testom, odnosno *kada bi svi ispitanici na drugom testu imali isti skor*. U eksperimentalnoj situaciji ovo bi odgovaralo ujednačavanju uzorka ispitanika u odnosu na osobinu koju meri drugi test. Kako predstavlja povezanost dve varijable nakon parcijalizovanja uticaja ostalih varijabli u modelu, ova vrsta povezanosti naziva se *parcijalnom*.

Parcijalna veza između varijabli grafički se može prikazati Venovim dijagramima kao u apletu – delom preseka dva objekta iz kog su isključeni preseci sa ostalim objektima. Ova vrsta povezanosti se može izraziti i kvantitativno, pri čemu postoji nekoliko različitih pokazatelja parcijalne veze. Svim pokazateljima parcijalne veze zajedničko je to da od jednostavne korelacije dve varijable oduzimaju vrednosti njihovih korelacija sa trećom varijablom – ili pak većim brojem „trećih“ varijabli, ukoliko je u modelu više od dva prediktora. Ovo bi približno odgovaralo veličini „parčeta“ preseka dve varijable predstavljenog u apletu. Ono po čemu se pokazatelji parcijalne veze uglavnom razlikuju jeste koji deo ukupne varijanse skupa varijabli se kontroliše, odnosno parcijalizuje. Naime, ukoliko su u modelu kriterijum i dva prediktora, moguće je kontrolisati uticaj jednog od prediktora i na kriterijum i na drugi prediktor, ili samo na prediktor. Ovu razliku je teško vizualizovati Venovim dijagramima, jer se u njima krug prediktora čiji uticaj se kontroliše uobičajeno preklapa i sa kriterijumom i sa prediktorom. Stoga su na slikama 3.8a i 3.8b ove razlike u računima parcijalne veze naglašene tako što su dodatno obojena variranja koja se parcijalizuju prediktorom P2. Na slici 3.8a plavom bojom su označeni zajednički delovi prediktora P2 sa obe varijable u modelu, i kriterijumom KR i prediktorom P1, što odgovara pristupu u kome se parcijalizuje efekat prediktora na sve varijable u modelu uključujući i kriterijsku. Na slici 3.8b plavom bojom je označen samo zajednički deo prediktora P2 sa prediktorom P1, što odgovara pristupu u kome se parcijalizuje efekat prediktora samo na ostale prediktorske varijable, dok je kriterijum „slobodan“ od kontrole.



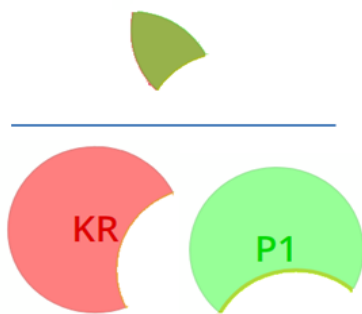
Slika 3.8a. Kontrola uticaja P2 na P1 i KR



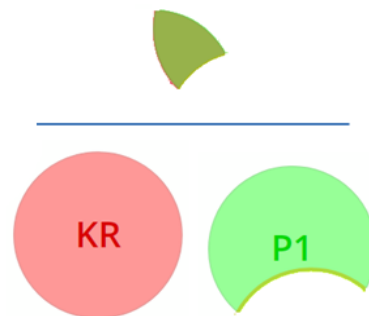
Slika 3.8b. Kontrola uticaja P2 na P1

Između dva opisana pristupa u računu parcijalne veze postoji razlika u „kontekstu“ u kome se nalazi parcijalni deo zajedničke varijanse varijabli, odnosno u količini variranja koja se kontroliše. Parcijalnom vezom objašnjeni i neobjašnjeni deo variranja se u računima parcijalne veze stavljaju

u odnos, kao na ilustracijama računa prikazanim na slikama 3.9a i 3.9b. Na ilustracijama su jednake količine variranja predstavljene na mestu brojioca. To su delovi kriterijuma objašnjeni parcijalnom vezom sa prediktorom P1. Međutim, na ilustracijama se razlikuju neobjašnjeni delovi varijanse koji se nalaze na mestu imenioca. To su ukupne varijanse kriterijuma i prediktora P1 koje nisu objašnjene prediktorom P2. Na slici 3.9a imenilac uključuje krugove kriterijuma i prediktora P1 iz kojih su izdvojena preklapanja sa prediktorom P2. Ovakva ilustracija odgovara postupku u kome se kontroliše uticaj prediktora i na ostale prediktore i na kriterijum, koji se primenjuje u računu *parcijalne korelacije*. Za razliku od toga, na slici 3.9b neobjašnjeni deo varijanse uključuje deo prediktora P1, ali celokupnu varijansu kriterijuma, što odgovara postupku u kome se ne kontroliše uticaj prediktora na kriterijum. Takva ilustracija odgovara računu *semi-parcijalne korelacije* i β koeficijenta, između kojih postoje manje matematičke razlike u izračunavanju.



Slika 3.9a. Ilustracija računa parcijalne korelacije



Slika 3.9b. Ilustracija računa semi-parcijalne korelacije i β koeficijenta

U apletu je veličina parcijalne veze predstavljena β (beta) koeficijentima. Oni su prikazani u prvom redu tabele, u žuto zasenčenim poljima.

Vežba 3.8. β koeficijenti u apletu [Venovi dijagrami](#)

Uporedite vrednosti β koeficijenata sa veličinom jednostavnih korelacija za odnose između varijabli, određene kao u vežbi 3.7 – približno 0,50 između svih varijabli.

Vrednosti β koeficijenata za oba prediktora su niže u odnosu na njihove jednostavne korelacije sa kriterijumom – one iznose za P1, kao i za P2, približno 0,33. Ove vrednosti pokazuju „težinu“ odnosno važnost koju neki prediktor ima u predviđanju, te se nazivaju još i β ponderi. Ukoliko se formirani model odnosi na predviđanje uspešnosti na osnovu dva testa, ovakav rezultat bi sugerisao da pri proceni buduće uspešnosti rezultatima na testovima treba dati podjednaku važnost.

Formula za izračunavanje β pondera za prediktor P1 je:

$$\beta_{P1} = \frac{r_{KR P1} - r_{KR P2} \cdot r_{P1 P2}}{1 - r_{P1 P2}^2}$$

U formuli za izračunavanje β pondera može se prepoznati logika opisana Venovim dijagramima: korelacija jednog prediktora i kriterijuma umanjena je za vrednost njihovih korelacija sa drugim prediktorom. Ta vrednost je stavljena u odnos sa varijansom prvog prediktora koja nije objašnjena njegovom korelacijom sa drugim prediktorom, odnosno njegovom ukupnom varijansom iz koje je izuzeta determinacija drugim prediktorom ($1 - r_{P1 P2}^2$). Ovaj „ostatak“ od ukupne varijanse neke varijable naziva se još i *rezidualna varijansa*. Zapazite da kriterijum nije predstavljen njegovom rezidualnom već ukupnom varijansom, kao u primerima na slikama 3.8b i 3.9b. Ukupna varijansa kriterijuma nije prikazana u imeniocu formule jer nije potrebna – za standardizovanu varijablu ona iznosi 1. S obzirom na to da ne kontrolišu efekat drugog prediktora i na kriterijum, β ponderi pokazuju samostalni uticaj određenog prediktora na *ukupnu* varijansu kriterijuma, što je pogodnije za regresionu analizu kojoj je cilj da opiše koliko je kriterijum objašnjen prediktorima. Drugim rečima, oni upućuju na to koliki je *inkrement*, odnosno prirast u ukupnom objašnjenju kriterijuma koji se može pripisati određenom prediktoru, mimo objašnjenja koje se može pripisati ostalim prediktorima.

Vežba 3.9. Preseci različitih veličina i β ponderi u apletu [Venovi dijagrami](#)

Varirajte veličine jednostavnih korelacija a) između prediktora i b) između prediktora i kriterijuma, i posmatrajte promene u vrednostima β koeficijenata.

Sa povećanjem korelacije između prediktora, smanjuju se njihovi parcijalni doprinosi predviđanju – deo prediktora koji je zajednički sa drugim prediktorom je *redundantna informacija* o njemu za objašnjenje kriterijuma, jer je to objašnjenje koje nude i drugi prediktori. Sa smanjenjem korelacije između prediktora i kriterijuma, vrednosti β pondera se takođe smanjuju – neka pojava se ne može objasniti prediktorom koji sa njom nije povezan, te je takav prediktor za objašnjenje kriterijuma *irelevantan*.

3.3.2.1 Parcijalne veze i objašnjenje kriterijuma

Vežba 3.10. Preseci različitih veličina i pokrivenost kriterijuma u apletu [Venovi dijagrami](#)

Varirajte izgled Venovih dijagrama tako da predstavljaju modele u kojima, u proceni rezultata na kriterijumu, različitim prediktorima treba dati različitu važnost. Posmatrajte odnos veličina β pondera i koeficijenata višestruke korelacije i determinacije.

Sa povećanjem nezavisnih doprinosa predviđanju pojedinačnih prediktora raste i proporcija objašnjene varijanse kriterijuma. Ovaj odnos između β pondera i objašnjene varijanse kriterijuma može se prikazati i na sledeći način. Venovim dijagramima β ponderi su prikazani kao delovi

jednostavnih korelacija između varijabli. Otuda se mogu interpretirati i kao pokazatelji udela samostalnih doprinosa prediktora u njihovim jednostavnim korelacijama sa kriterijumom. Suma ovih relativnih doprinosa jednostavnih korelacija prediktora i kriterijuma jednaka je proporciji objašnjene varijanse kriterijuma, odnosno koeficijentu višestruke determinacije. Ovo se može izraziti formulom za izračunavanje koeficijenta višestruke determinacije koja je nešto drugačija od prethodno prikazane:

$$R_{KR.P1P2}^2 = \beta_{P1} \cdot r_{KR P1} + \beta_{P2} \cdot r_{KR P2}$$

3.3.2.2 Parcijalne veze i rezultat ispitanika na kriterijumu

Parcijalne veze između prediktora i kriterijuma oblikuju i pojedinačni rezultat ispitanika na kriterijumu, koji se može izraziti kompozitom analognim onom u predviđanju na osnovu jednog prediktora, opisanom u odeljku *Kartezije ili korelacija*. Pojedinačni rezultat u situaciji predviđanja na osnovu većeg broja prediktora takođe uključuje referentnu vrednost koju bi ispitanik imao u hipotetičkoj situaciji da na svim prediktorskim varijablama ima vrednost 0 i koja bi, kada su prediktori standardizovani, odgovarala aritmetičkoj sredini kriterijuma. To je koeficijent a u predviđanju na osnovu jedne varijable ili, kako je u višestrukom predviđanju uobičajenije β_0 . Takođe, kao i u predviđanju na osnovu jedne varijable, rezultat na kriterijumu opisanom sa više prediktora uključuje odstupanja ispitanikovih rezultata od predviđenih (e od engl. *error*). Međutim, za razliku od predviđanja na osnovu jedne varijable, sada na ukupni rezultat ne utiče rezultat na jednoj nego na više prediktorskih varijabli, pri čemu će na ukupan rezultat više uticati rezultat na onom prediktoru koji ima veći parcijalni doprinos predviđanju. Otuda rezultati na pojedinačnim prediktorima nisu modifikovani veličinom njihove jednostavne korelacije sa kriterijumom nego njihovom parcijalnom vezom sa kriterijumom, koja u slučaju standardizovanih varijabli odgovara β ponderima. Tako bi standardizovani rezultat ispitanika $\hat{Y}_{ZZ}$ na kriterijskom testu odstupao od referentne vrednosti (β_0) za onoliko koliko je zbir njegovih rezultata na standardizovanim ponderisanim prediktorskim varijablama (βX), kome su dodata odstupanja njegovih rezultata od predviđenih (e):

$$\hat{Y}_{ZZ} = \beta_0 + \beta_{P1}X_{ZZ(P1)} + \beta_{P2}X_{ZZ(P2)} + e$$

3.4 Multikolinearnost ili netolerancija na išlere

Vežba 3.11. *Veoma korelisani prediktori u apletu [Venovi dijagrami](#)*

Postavite prediktorske varijable P1 i P2 tako da se presecaju sa kriterijumom, a da se međusobno u velikoj meri ili potpuno prekrivaju.

Gotovo potpuno prekrivanje dva prediktora predstavljeno je na slici 3.10.



Slika 3.10. Skoro potpuno prepokrivanje prediktora

i Pokušajte da date primer prediktorskih varijabli koje se potpuno prepokrivaju.

Evo nekih primera. Potpuno prepokrivanje prediktora postojalo bi u situaciji kada prediktori mere istu varijablu, samo u različitim jedinicama. Na primer, ako bi prihod u porodici predstavili dvema varijablama od kojih je jedna prihod u dinarima, a druga prihod u eurima. Ove dve varijable su u maksimalnoj korelaciji i razlikuju se samo po jedinici mere. Druga moguća situacija bila bi kada bi jedna prediktorska varijabla bila izvedena iz drugih. Ukoliko bismo porodične prihode izrazili merama prihoda supruge i prihoda supruge i njima dodali meru „ukupan prihod“ koja je njihov zbir, u modelu bismo imali prediktorsku varijablu koja je izvedena iz prethodne dve. Takođe, variranja skorova ispitanika na dvema različitim formama istog testa bila bi gotovo istovetna.

U ovakvom modelu prediktorske varijable su u maksimalnoj jednostavnoj korelaciji, odnosno visokoj linearnoj povezanosti, tako da se jedan prediktor može linearno predvideti na osnovu drugih prediktora. Oni su u odnosu *kolinearnosti* ili *multikolinearnosti*.

Vežba 3.12. Multikolinearnost i rezultati regresione analize u apletu [Venovi dijagrami](#)

Posmatrajući rezultate u apletu, zaključite kako multikolinearnost utiče na rezultate višestruke regresione analize, odnosno kako utiče na objašnjenost kriterijuma i parcijalne doprinose objašnjenju kriterijuma. Posmatrajte koeficijente višestruke korelacije i determinacije R i R^2 , jednostavne korelacije i β pondere, i zaključite da li su oni adekvatni pokazatelji predviđanja u situaciji multikolinearnosti.

Posmatrajući dijagrame, uočava se da je objašnjenost kriterijuma ista kao i sa jednim prediktorom, jer novi prediktor ne objašnjava novi deo varijanse kriterijuma. Shodno tome, koeficijenti višestruke korelacije i determinacije ne povećavaju se niti smanjuju. U njihovom računu, naime, doprinos koji ima novi prediktor oduzima se zbog njegove korelacije sa prvim prediktorom. Pokazujući stvarno stanje objašnjenosti kriterijuma, može se reći da je R upotrebljiva mera u situaciji multikolinearnosti.

Kada su u pitanju parcijalni doprinosi prediktora predviđanju, dijagrami pokazuju njihov nulti samostalni doprinos. β ponderi, međutim, ne pokazuju nulti doprinos: oni mogu biti visoki, čak sa vrednostima iznad jedan, što izlazi iz okvira vrednosti koeficijenta korelacije. Ovaj donekle neočekivan rezultat posledica je načina na koji se β ponderi računaju. Naime, kada je neki prediktor sa nekim od drugih prediktora u odnosu multikolinearnosti, u imeniocu formule za njegov β ponder nalaziće se vrednost bliska nuli, jer je njegov samostalan (drugim prediktorima neobjašnjen) deo variranja veoma mali ($1 - r^2_{p1,p2} \approx 0$). Kada se vrednost u brojiocu formule podeli vrednošću imenioca koja iznosi nula ili skoro nula, dobiće se visoka vrednost koeficijenta. Stoga su ovako visoke ili nadjedinične vrednosti β pondera čest *indikator* multikolinearnosti.

Kada postoji nizak samostalni doprinos prediktorskih varijabli, β ponderi su veoma nepouzdati pokazatelji parcijalnog doprinosa, usled čega će najčešće imati visoku standardnu grešku (Friedman & Wall, 2005). Samostalni deo prediktora naziva se *tolerancija* i izražava kao $1 - R^2$, gde je R^2 višestruka determinacija prediktora *ostalim prediktorima*. Tolerancija je komponenta standardne greške β koeficijenta i njena niska vrednost – kakva je u situaciji multikolinearnosti – grešku povećava. Visok stepen greške u objašnjenju kriterijuma na osnovu identičnih prediktora ima logičko opravdanje u neodređenosti ovakvog rešenja – ukoliko različite varijable objašnjavaju isti deo kriterijuma, nejasno je kojoj od njih bi trebalo pripisati to objašnjenje. Drugim rečima, regresiona analiza „nije tolerantna“ na preklapljene krugove prediktorskih varijabli – kakvi bi bili kod filom spojenih keksića ili išlera.

U apletu, ispod tabele sa korelacijama, nalazi se jedan od indikatora porasta greške. To je *Variance Inflation Factor* (VIF), koji pokazuje inflaciju ili porast varijanse greške prediktorskih varijabli. On predstavlja recipročnu vrednost tolerancije i za prediktor P1 bi se računao kao:

$$VIF_{P1} = \frac{1}{1 - R^2_{P1.P2P3}}$$

– gde je $R^2_{P1.P2P3}$ višestruka determinacija prediktora ostalim prediktorima. Ukoliko prediktori međusobno uopšte ne korelišu, njegova vrednost će biti 1. Ukoliko pak visoko korelišu, vrednost će biti visoka – u primeru iz vežbi 3.11 i 3.12 za preklapljene prediktore P1 i P2 imaće vrednosti iznad 100. Kvadratni koren iz VIF vrednosti pokazuje koliko puta je standardna greška β koeficijenta nekog prediktora veća u odnosu na situaciju kada taj prediktor ne bi korelisao sa drugim prediktorima.

3.4.1 Neiskorišćena informacija u modelu

U situaciji multikolinearnosti varijabli u regresionoj analizi takođe se može zapaziti delovanje principa parsimonije. On je ovde primenjen kroz uzimanje u obzir koliki je deo ukupnog sistema

varijabli u modelu ostao „neiskorišćen“ tj. kolika količina informacija u prediktorima je neiskorišćena za predviđanje.

Uzimajući ovo u obzir, mogu se razlikovati tri aspekta procene koliko je neki model dobar, odnosno koliko je informativan za objašnjenje kriterijuma. Prvi, koliki deo varijanse kriterijuma je objašnjen prediktorima, što kvantitativno pokazuje koeficijent višestruke determinacije (R^2), a grafički prepokrivenost kruga kriterijuma prediktorima. Drugi, koliki deo varijanse prediktora samostalno objašnjava kriterijum, što kvantitativno pokazuju koeficijenti parcijalne veze, a grafički deo preseka prediktora i kriterijuma kada se odstrane preseki sa ostalim prediktorima. I konačno, treći aspekt bio bi iskorišćenost ukupne količine informacija u sistemu varijabli, odnosno kolika je greška u sistemu u smislu varijanse prediktora kojom ne doprinose predviđanju, što je grafički predstavljeno ukupnom konstelacijom Venovih dijagrama.

3.5 Supresija ili neočekivana pomoć

Vežba 3.13. *Prediktor koji ne koreliše sa kriterijumom u apletu [Venovi dijagrami](#)...*

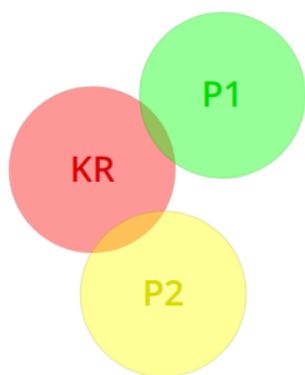
Predstavite Venovim dijagramima model u kojem je kriterijum KR objašnjen nekorelisanim prediktorskim varijablama P1 i P2 približno 9%, ali ne i prediktorskom varijablom P3. Posmatrajte vrednosti koeficijenta determinacije i β pondera.

Dijagram bi mogao da izgleda kao na slici 3.11a gde je objašnjeno oko 9% ukupnih variranja rezultata na kriterijumu, što odgovara koeficijentu $R=0,30$, pri čemu se to objašnjenje ne može smatrati značajnim za interpretaciju ($p=0,11$). S obzirom na to da prediktori P1 i P2 ne korelišu, vrednosti njihovih β pondera su jednake njihovim jedostavnim korelacijama sa kriterijumom i iznose oko 0,20. Jednostavne korelacije i β ponderi prediktora P3, koji ne koreliše ni sa prediktorima ni sa kriterijumom, iznose 0.

Vežba 3.13. ... nastavak

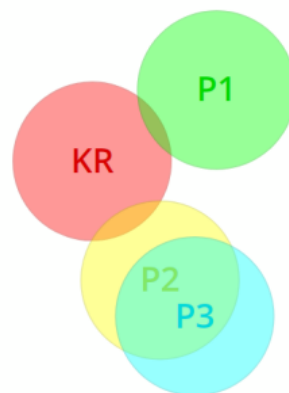
Sada pokušajte da povećate proporciju objašnjene varijanse kriterijuma, izraženu koeficijentom višestruke determinacije R^2 , ne menjajući položaj prediktorskih varijabli P1 i P2, ali tako da varijabla P3 i dalje ne koreliše sa kriterijumom.

Da bi se ovo postiglo, potrebno je promeniti položaj varijable P3 tako da bude uključena u model, ali uz uslov da ne koreliše sa kriterijumom. U tom slučaju P3 može da koreliše samo sa nekim od prediktora (npr. P2), kao na slici 3.11b.



$R \approx 0,30$; $R^2 \approx 0,09$; $R^2_{adj} \approx 0,05$; $p \approx 0,11$

Slika 3.11a. Prediktori korelišu sa kriterijumom



$R \approx 0,42$; $R^2 \approx 0,18$; $R^2_{adj} \approx 0,15$; $p \approx 0,01$

Slika 3.11b. Jedan od prediktora koreliše samo sa prediktorom, a ne sa kriterijumom

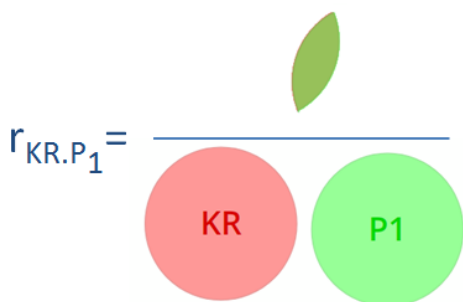
❗ *Da li je varijabla P3 doprinela predviđanju? Kako je korelacija prediktora sa prediktorom koji ne koreliše sa kriterijumom uticala na koeficijent višestruke determinacije i β koeficijente?*

Koeficijent višestruke korelacije se povećao, što je indikator da se povećala objašnjenost kriterijuma. β ponderi pojedinih prediktora su se približili jediničnoj vrednosti ili su je čak nadmašili.

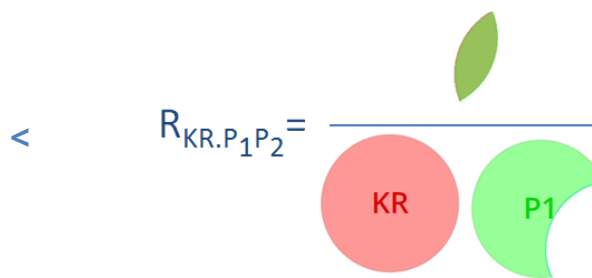
❗ *Objasnite kako je došlo do ovog efekta.*

Ova „kvaziparadoksalna zanimljivost“ (Cohen & Cohen, 1975, prema Krus & Wilkinson, 1986) uočena je sredinom XX veka u istraživanjima selekcije kandidata za obuku za pilote (Horst, 1941, prema Krus & Wilkinson, 1986). Uspešnost u pohađanju obuke za pilotiranje procenjena je na osnovu testova mehaničkih, numeričkih, spacijalnih i verbalnih sposobnosti. Dok su prva tri testa korelisala sa uspešnošću, verbalne sposobnosti nisu. Međutim, kada su u model uključene i verbalne sposobnosti, njegova validnost se povećala. Naime, verbalne sposobnosti korelišu sa ostala tri prediktora jer su potrebne za čitanje i razumevanje instrukcija i pitanja u testovima. Variranja u skorovima ispitanika na mehaničkim, spacijalnim i numeričkim sposobnostima, koja su posledica njihovih razlika u brzini razumevanja instrukcije, a koje postoje zbog razlika u verbalnim sposobnostima, nisu relevantna za uspešnost u pilotiranju, ne korelišu sa uspešnošću i predstavljaju varijansu greške u modelu, koja nastaje u postupku merenja prediktorskih varijabli. Uključivanjem verbalnih sposobnosti u model, ovaj deo varijanse greške se kontroliše parcijalizovanjem – kao da su ispitanici po verbalnim sposobnostima ujednačeni. Uklanjanjem greške, odnosno „šuma“ u informaciji koju nose, prediktori se poboljšavaju, postaju „čistiji“ i efektivniji. Ovaj efekat „sredstva za čišćenje“, nazvan je *supresorski efekat* ili *supresija* jer potiskuje odnosno supresuje irelevantnu varijansu prediktora, a varijable koje ga izazivaju nazivaju se supresorskim varijablama (Ludlow & Klein, 2014).

Povećanje koeficijenta višestruke korelacije, koje je posledica supresorskog efekta, ne može se adekvatno vizualizovati dijagramima, jer se ne vidi povećanje objašnjene varijanse u krugu koji predstavlja kriterijum. Pojedini autori predlažu drugačija grafička rešenja, kao na primer grafik promene vrednosti R i β koeficijenata u zavisnosti od korelacije prediktora sa kriterijumom i korelacija između prediktora (Friedman & Wall, 2005; Ludlow & Klein, 2014; Sharpe & Roberts, 1997). Osim ovim načinima, povećanje koeficijenta višestruke korelacije se može razumeti vizualizacijom koja uključuje Venove dijagrame, ako zamislimo da grafički stavljamo u odnos objašnjenu varijansu kriterijuma sa ukupnom varijansom u modelu. Tada bismo veličinu preseka prediktora i kriterijuma delili veličinom krugova koji predstavljaju prediktor i kriterijum, kao na slici 3.12a. U situaciji kada je varijansa prediktora parcijalizovana drugim prediktorom, ona ne bi bila predstavljena punim krugom već delom kruga koji ostaje kada se odstrani njegov presek sa drugim prediktorom. Ukupna količina varijanse u sistemu varijabli bila bi manja, te bi proporcija objašnjenosti kriterijuma u odnosu na nju bila veća (slika 3.12b).



Slika 3.12a. Jednostavna korelacija kriterijuma i prediktora



Slika 3.12b. Korelacija kriterijuma i prediktora sa supresorskom varijablom u modelu

Formulama se ovo može objasniti na sledeći način. S obzirom na to da je korelacija supresora i kriterijuma nula, formula za račun R^2 svela bi se na količnik determinacije kriterijuma i prvog prediktora (u brojiocu) i nondeterminacije, odnosno ostatka od korelacije između dva prediktora (u imeniocu). Kako je $r_{p1,p2}^2$ veće od nula, u imeniocu bi bila vrednost manja od jedan, zbog čega je koeficijent višestruke determinacije veći od koeficijenta jednostavne determinacije kriterijuma i prvog prediktora.

$$R_{KR.P1P2}^2 = \frac{r_{KR P1}^2 - 0}{1 - r_{P1 P2}^2}$$

Slično, ako je $r_{kr,p2}=0$, vrednosti β pondera za varijable u supresorskom odnosu najčešće imaju visoku, neretko nadjediničnu vrednost, koja može biti i negativnog predznaka:

$$\beta_{P2} = \frac{0 - r_{KR P1} \cdot r_{P1 P2}}{1 - r_{P1 P2}^2}$$

Vežba 3.14. *Supresije različite vrste u apletu [Venovi dijagrami](#)*

Proverite da li je moguće postići supresorski efekat i u slučaju da supresorska varijabla u nekoj meri koreliše sa kriterijumom.

Povećanje koeficijenta višestruke determinacije koje je veće od suma kvadriranih korelacija pojedinačnih prediktora i kriterijuma može se uočiti i u situaciji kada jedan od prediktora pozitivno koreliše i sa prediktorom i sa kriterijumom, supresujući irelevantnu varijansu prediktora. U tom slučaju njegov β ponder ima negativnu vrednost, te se ovaj vid supresije zove *negativna* ili, zbog uzajamnih veza varijabli, *net* supresija. Pored ovog, moguće je da prediktori jedan drugom supresuju irelevantnu varijansu, što se naziva *recipročna* ili *kooperativna* supresija (Ludlow & Klein, 2014; Tzelgov & Henik, 1991). U ovim slučajevima prediktori najčešće objašnjavaju gotovo isti deo varijanse kriterijuma, zbog čega je donekle slična situaciji multikolinearnosti.

Složeni odnosi između varijabli, multikolinearnost i supresorski efekat nisu osobenosti samo regresione analize. Oni su prisutni i u drugim analizama koje uzimaju u obzir više varijabli, kao što su multivarijantne tehnike faktorska analiza, kanonička analiza i diskriminativna analiza, a takođe i u oblicima regresionih modela koji uključuju numeričke ili ordinalne varijable. Međutim, odnosi među varijablama grafički prikazani Venovim dijagramima mogu, bar delom, da se primene za razumevanje odnosa između varijabli i u ovim analizama.

(IV) SESTRE PO GENERALNIM LINEARNIM MODELIMA

4.1 Površinske razlike...

Analiza varijanse i višestruka regresiona analiza su statističke tehnike koje se razlikuju u odnosu na to kojim istraživačkim problemima su namenjene – ispitivanju razlika između grupa ili ispitivanju povezanosti između varijabli, shodno tome da li uključuju nezavisne varijable koje su kvantitativne ili kategorijalne. U ovoj knjizi one su i opisane pomoću različitih vizuelnih prikaza – linijskog grafika i Venovih dijagrama. Međutim, iza površinskih razlika ove dve analize imaju veći broj suštinskih sličnosti.

4.2 ... i dubinske sličnosti

Prva sličnost koja se može uočiti između ove dve analize je *priroda zavisne varijable*. Iako se razlikuju po prirodi nezavisnih varijabli, obe analize se primenjuju u nacrtima istraživanja u kojima su podaci na zavisnoj varijabli kvantitativni i normalno distribuirani – kako bi na osnovu njih mogle da se računaju aritmetičke sredine ili korelacije.

Dalje, obe analize primenjuju *dekompoziciju varijabilnosti* prisutne u podacima. U obe analize ukupna variranja rezultata na zavisnoj varijabli se „razlažu“ na efekte koji se mogu pripisati nezavisnim varijablama, odnosno formiranom modelu, i na slučajna variranja koja se mogu pripisati individualnim varijacijama i koja se obično nazivaju greškom (Ip, 2007). I efekat i greška su u obe analize mogle da se zapaze na vizuelnim prikazima. Kod analize varijanse to su razlike između aritmetičkih sredina na linijskom grafiku, a u regresionoj analizi prepokrivenost kruga koji označava kriterijum krugovima koji označavaju prediktore. Greška je takođe bila predstavljena vizuelno u obe analize: na linijskom grafiku to su linije greške, a na Venovim dijagramima prediktorima neprepokriveni deo kruga koji prikazuje kriterijum.

Analizama je zajedničko i to da za razlaganje podataka na komponente koriste sume kvadriranih odstupanja od aritmetičkih sredina, skraćeno *sume kvadrata* ili *SS*. U analizi varijanse sume kvadriranih odstupanja od aritmetičkih sredina u osnovi su glavnog testa koji primenjuje, a koji stavlja u odnos variranja između i unutar grupa. Međutim, račun suma kvadrata primenjuje se i u regresionoj analizi. Naime, koeficijent višestruke determinacije R^2 može se izraziti kao odnos sume kvadrata koja se može pripisati objašnjenju na osnovu formiranog modela (SS_M) i ukupne sume kvadrata (SS_T):

$$R^2 = \frac{SS_M}{SS_T} = \frac{(y' - M_y)^2}{(y - M_y)^2}$$

– gde su SS_M kvadrirana odstupanja predviđenih rezultata (y') od aritmetičke sredine kriterijuma (M_y), a SS_T kvadrirana odstupanja rezultata na kriterijumu (y) od njihove aritmetičke sredine (M_y).

Primenom suma kvadrata, ove dve analize se računski mogu svesti jedna na drugu – analiza varijanse se može posmatrati kao poseban slučaj regresione analize u kojoj su nezavisne varijable kategorijalne, pri čemu su kodirane na način prilagođen regresionoj analizi (Klasson, 2019). Različiti metodi za izračunavanje suma kvadrata u višesmernoj analizi varijanse se zapravo svode na regresione analize koje se razlikuju po tome da li se svi efekti nezavisnih varijabli u regresionom modelu parcijalizuju jedni u odnosu na druge (tip III), u model uvode po hijerarhijskom redosledu, sekvencijalno (tip I), ili se uvedeni glavni efekti parcijalizuju jedan u odnosu na drugi (tip II).

U obe analize u testiranju količine variranja u podacima objašnjenih modelom važnu ulogu ima *F test*. Format i namena u ovim analizama mu se naizgled razlikuju – u analizi varijanse primenjuje se za testiranje značajnosti razlika između aritmetičkih sredina, a u regresionoj analizi za testiranje značajnosti koeficijenta višestruke korelacije. Međutim, u obe analize *F test* stavlja u odnos deo varijanse zavisne varijable objašnjen nezavisnim varijablama i deo varijanse zavisne varijable koji je njima ostao neobjašnjen.

U obe analize rezultat na zavisnoj varijabli može da se izrazi kao *linearni kompozit rezultata* koji, u formi zajedničkoj za njih, predstavlja odnos rezultata na zavisnoj varijabli i tri elementa:

Rezultat na zavisnoj varijabli = referentna vrednost + efekat (model) + greška

Specifičnije za regresionu analizu i analizu varijanse, elementi ovog kompozita su:

REGRESIONA ANALIZA

$$Y = \beta_0 + \beta_n X_n + e$$

Y – rezultat na zavisnoj varijabli
 β_0 – intercept; aritmetička sredina kriterijskih vrednosti kada su vrednosti na standardizovanim prediktorima 0
 X – rezultat na prediktoru
 β – parcijalni doprinos predviđanju
 e – greška

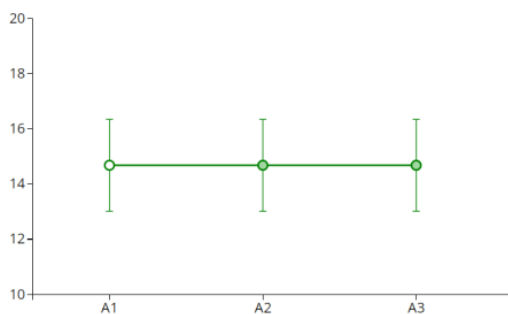
ANOVA

$$Y = M_t + (M_g - M_t) + (Y - M_t)$$

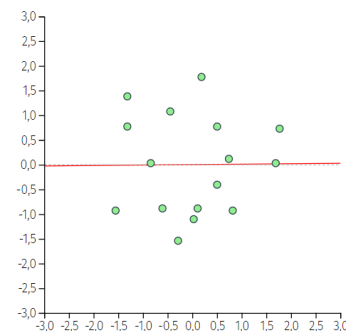
Y – rezultat na zavisnoj varijabli
 M_t – zajednička aritmetička sredina
 M_g – aritmetička sredina grupe kojoj ispitanik pripada

Prvi prikazan element u jednačinama je referentna vrednost. U regresionoj jednačini uobičajeno je označena sa a ili, u slučaju više prediktora, sa β_0 i predstavlja vrednost na zavisnoj varijabli Y kada je vrednost na svim prediktorskim varijablama (X) jednaka nuli. Po analogiji sa grafičkim predstavljanjem predviđanja na osnovu jedne varijable, to je vrednost na y -osi koju preseca linija predviđanja pa joj je čest naziv *intercept*. Kada su prediktorske varijable standardizovane, intercept odgovara aritmetičkoj sredini rezultata na kriterijumu. U analizi varijanse referentna vrednost je aritmetička sredina rezultata svih ispitanika, bez obzira kojoj grupi pripadaju (M_t). Kada su varijable standardizovane, referentne vrednosti će u obe analize imati vrednost 0, te se mogu razumeti i kao početne vrednosti (engl. *baseline*).

Poslednji prikazan element u jednačinama predstavlja individualne varijacije neobjašnjene modelom, koje se obično nazivaju greška ili *rezidual*. U regresionom modelu to su odstupanja rezultata na zavisnoj varijabli od po modelu predviđenog rezultata, koji se obično označava sa e (od engl. *error*). U analizi varijanse to su odstupanja rezultata na zavisnoj varijabli od aritmetičke sredine rezultata njegove grupe ($Y - M_g$). Kada je rezultat na zavisnoj varijabli oblikovan isključivo individualnim varijacijama, uočljiva je analogija između grafičkih prikaza analize varijanse i jednostavne regresije. Linija na linijskom grafiku i linija predviđanja rezultata na osnovu dve standardizovane varijable imaju isti pravac – horizontalan, kao na graficima 4.1a i 4.1b. Kada nije modifikovan postojanjem efekta, u obe analize rezultat na zavisnoj varijabli određen je isključivo njegovim odstupanjem od linije.



Slika 4.1a. Jednosmerna ANOVA – odsustvo uticaja nezavisne varijable



Slika 4.1b. Jednostavna regresija – odsustvo uticaja nezavisne varijable

Centralni parametar u obe jednačine je uticaj koji nezavisna varijabla ima na zavisnu varijablu, odnosno efekat modela. U regresionoj analizi to je veličina parcijalne veze prediktora i kriterijuma, koja ima ulogu pondera rezultata na prediktoru (βX). U analizi varijanse to su međugrupna variranja. Kada se zanemari uticaj greške, rezultat pojedinačnog ispitanika će zavisiti od toga kojoj grupi pripada i koliko aritmetička sredina te grupe odstupa od zajedničke aritmetičke sredine ($M_g - M_t$).

Zajedničke osobine svrstavaju analizu varijanse i regresionu analizu u relativno široku grupu analiza koje se nazivaju *generalni linearni modeli*.

4.3 Linearno i generalno u modelima

Upotreba termina *linearnost* očiglednija je u regresionoj analizi, u čijem proširenom nazivu se i nalazi. U ovoj analizi odnos prediktora i kriterijuma je takav da se može predstaviti pravom linijom, a linearnost odnosa svih varijabli u modelu (kriterijuma i prediktora, prediktora i prediktora) jedan je od najvažnijih uslova za primenu ove analize. Sa druge strane, kod analize varijanse, u koju je uključena jedna zavisna kvantitativna varijabla, potreba uslova za linearnošću nije od značaja jer su ostale varijable uključene u analizu kategorijalne. Stoga je osnovni razlog za linearnost u nazivu ove grupe modela drugi. Ono što obe analize čini predstavnicama linearnih modela jeste to što se u obe odnos kriterijuma i parametara može izraziti jednačinom koja je u osnovi linearna, odnosno takva da vrednost na kriterijumu raste ili opada s obzirom na vrednost kompozita *linearno* (a ne npr. logaritamski ili eksponencijalno...). U linearnim jednačinama odnos rezultata na zavisnoj varijabli i parametara nije zakrivljen dodatnom transformacijom rezultata.

Transformacija vrednosti na varijablama je neophodna da bi se postigao linearan odnos u analizama u kojima zavisna varijabla nije kontinuirana i normalno distribuirana, nego kategorijalna ili ordinalna. Takva je, na primer, logistička regresiona analiza, namenjena predviđanju pripadnosti slučajeva u dve ili veći broj grupa. U takvoj analizi linearnost se postiže transformacijom rezultata na zavisnoj kategorijalnoj promenljivoj u logaritme šansi, koja je novi element u regresionoj jednačini. Takve analize pripadaju široj grupi *generalizovanih* linearnih modela (engl. *generalized*), čija podgrupa su generalni linearni modeli kojima pripadaju analiza varijanse i regresiona analiza (Dunn & Smyth, 2018).

LITERATURA

- Acosta, N., & Toloza, J. (2012). Techniques to improve the GPS precision. *Editorial Preface*, 3(8), 125-130. <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2012.030820>
- Anscombe, F. J. (1973). Graphs in statistical analysis. *The American Statistician*, 27(1), 17-21. <https://doi.org/10.1080/00031305.1973.10478966>
- Arbuthnot, J. (1710). II. An argument for divine providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 27(328), 186-190. <https://doi.org/10.1098/rstl.1710.0011>
- Austin, P. C., & Hux, J. E. (2002). A brief note on overlapping confidence intervals. *Journal of Vascular Surgery*, 36(1), 194-195. <https://doi.org/10.1067/mva.2002.125015>
- Bardou, P., Mariette, J., Escudié, F., Djemiel, C., & Klopp, C. (2014). jvenn: an interactive Venn diagram viewer. *BMC bioinformatics*, 15(1), 293. <https://doi.org/10.1186/1471-2105-15-293>
- Belia, S., Fidler, F., Williams, J., & Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standard error bars. *Psychological methods*, 10(4), 389-396. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.10.4.389>
- Bill, J. A. (1998). Problems in statistics: Learning style, age, and part-time students. *Education* 118(4), 526-529.
- Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes: Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? In J. Garfield (Ed.), *Research papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 4)* (pp. 20-37). University of Minnesota.
- Borst, A., & Plett, J. (2013). Seeing the world through an insect's eyes. *Nature*, 497(7447), 47-48. <https://doi.org/10.1038/497047a>
- Box, J. F. (1980). RA Fisher and the design of experiments, 1922-1926. *The American Statistician*, 34(1), 1-7. <https://doi.org/10.2307/2682986>
- Chan, Y., & Walmsley, R. P. (1997). Learning and understanding the Kruskal-Wallis one-way analysis-of-variance-by-ranks test for differences among three or more independent groups. *Physical therapy*, 77(12), 1755-1761. <https://doi.org/10.1093/ptj/77.12.1755>

- Crow, J. F. (1990). Anecdotal, historical and critical commentaries on genetics. RA Fisher, a centennial view. *Genetics*, 124(2), 207-211. <https://doi.org/10.1093/genetics/124.2.207>
- Cumming, G. (2008). Replication and p intervals: p values predict the future only vaguely, but confidence intervals do much better. *Perspectives on Psychological Science*, 3(4), 286-300. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6924.2008.00079.x>
- Cumming, G. (2009). Inference by eye: Reading the overlap of independent confidence intervals. *Statistics in medicine*, 28(2), 205-220. <https://doi.org/10.1002/sim.3471>
- Cumming, G. (2014). The new statistics: Why and how. *Psychological science*, 25(1), 7-29. <https://doi.org/10.1177/0956797613504966>
- Cumming, G., & Finch, S. (2005). Inference by eye: Confidence intervals and how to read pictures of data. *American Psychologist*, 60(2), 170. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.60.2.170>
- Czajko, J. (2020). Unrestricted division by zero as multiplication by the – reciprocal to zero – infinity. *World Scientific News*, 145, 180-197. <http://www.worldscientificnews.com/wp-content/uploads/2020/04/WSN-145-2020-180-197.pdf>
- De Jong, T. (2019). A Bayesian approach to the correction for multiplicity. *PsyArXiv*, 1-34. <https://doi.org/10.31234/osf.io/s56mk>
- Deviant, S. (2011). *The practically cheating statistics handbook*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Dunn, D. S. (2001). *Statistics and Data Analysis for Behavioral Sciences*. McGraw-Hill, McGraw-Hill College; Study Guide edition.
- Dunn, P. K. & Smyth, G. K. (2018). Chapter 1: Statistical Models. In: P. K. Dunn & G. K. Smyth (Ed.) *Generalized linear models with examples in R. Springer Texts in Statistics* (pp. 1-30). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0118-7_1
- Edwards, A. W. F. (2006). Statisticians in stained glass houses. *Significance*, 3(4), 182-183. <https://doi.org/10.1111/j.1740-9713.2006.00203.x>
- El Tantawi, M. M. A. (2009). Factors affecting postgraduate dental students' performance in a biostatistics and research design course. *Journal of Dental Education*, 73(5), 614-623. <https://doi.org/10.1002/j.0022-0337.2009.73.5.tb04736.x>

- Fahim, A., Rehman, S., Fayyaz, F., Javed, M., Alam, M. A., Rana, S., Fahim, H. J., & Alam, M. K. (2021). Identification of Preferred learning style of medical and dental students using VARK questionnaire. *BioMed Research International*, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/4355158>
- Feldman, J. (1999). The role of objects in perceptual grouping. *Acta Psychologica*, 102(2-3), 137-163. [https://doi.org/10.1016/S0001-6918\(98\)00054-7](https://doi.org/10.1016/S0001-6918(98)00054-7)
- Fried, E. I. (2017). What are psychological constructs? On the nature and statistical modelling of emotions, intelligence, personality traits and mental disorders. *Health Psychology Review*, 11(2), 130-134. <https://doi.org/10.1080/17437199.2017.1306718>
- Friedman, L. & Wall, M. (2005). Graphical views of suppression and multicollinearity in multiple linear regression. *The American Statistician*, 59(2), 127-136. <https://doi.org/10.1198/000313005X41337>
- Friendly, M. (2008). A brief history of data visualization. In C. H. Chen, W. K. Härdle & A. Unwin (Eds.), *Handbook of data visualization* (pp. 15-56). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-33037-0_2
- Friendly, M., Valero-Mora, P., & Ibáñez Ulargui, J. (2010). The first (known) statistical graph: Michael Florent van Langren and the "secret" of longitude. *The American Statistician*, 64(2), 174-184. <https://doi.org/10.1198/tast.2010.09154>
- Gastwirth, J. L., Gel, Y. R., & Miao, W. (2009). The impact of Levene's test of equality of variances on statistical theory and practice. *Statistical Science*, 24(3), 343-360. <https://doi.org/10.1214/09-STS301>
- Gigerenzer, G. (1993). The superego, the ego, and the id in statistical reasoning. In G. Keren & C. Lewis (Eds.), *A handbook for data analysis in the behavioral sciences: Methodological issues* (pp. 311-339). Lawrence Erlbaum Associates. <https://psycnet.apa.org/record/1992-98949-011>
- Gigerenzer, G. (2004). Mindless statistics. *The Journal of Socio-Economics*, 33(5), 587-606. <https://doi.org/10.1016/j.socsec.2004.09.033>
- Gigerenzer, G., Krauss, S., & Vitouch, O. (2004). The null ritual: What you always wanted to know about significance testing but were afraid to ask. In D. Kaplan (Ed.), *The Sage handbook of quantitative methodology for the social sciences* (pp. 391-408). Sage. https://pure.mpg.de/rest/items/item_2101291/component/file_3080636/content

- Gigerenzer, G., & Marewski, J. N. (2015). Surrogate science: The idol of a universal method for scientific inference. *Journal of Management*, 41(2), 421-440. <https://doi.org/10.1177/0149206314547522>
- Hájek, A. (2019). Interpretations of Probability. In E. N. Zalta (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition). <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/probability-interpret/>
- Hall, N. S. (2010). Ronald Fisher and Gertrude Cox: Two statistical pioneers sometimes cooperate and sometimes collide. *The American Statistician*, 64(3), 212-220. <https://doi.org/10.1198/tast.2010.10043>
- Harrison, P. (2016). Angels on pinheads and needles' points. *Notes and Queries*, 63(1), 45-47. <https://doi.org/10.1093/notesj/gjv232>
- Hawk, T. F., & Shah, A. J. (2007). Using learning style instruments to enhance student learning. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, 5(1), 1-19. <https://doi.org/10.1111/j.1540-4609.2007.00125.x>
- Heathcote, A., & Matzke, D. (2021). The limits of marginality. *Computational Brain & Behavior*, 1-7. <https://doi.org/10.1007/s42113-021-00120-3>
- Herzog, M. H., Francis, G., & Clarke, A. (2019). The multiple testing problem. In *Understanding Statistics and Experimental Design* (pp. 63-66). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03499-3_5
- Holms, R. (2011). *Doba čuda*. Zavod za udžbenike i Dosije studio.
- Ip, E. H. (2001). Visualizing multiple regression. *Journal of Statistics Education*, 9(1), 2469-2478. <https://doi.org/10.1080/10691898.2001.11910646>
- Ip, E. H. (2007). General linear models. In W. T. Ambrosius (Ed.) *Methods in molecular biology*, vol. 404: *Topics in biostatistics* (pp. 189-211). Humana Press Inc. https://doi.org/10.1007/978-1-59745-530-5_10
- Jevremov, T., & Pajić, D. (2023). *Bayesian method in psychology: a bibliometric analysis*. PsyArXiv. <https://doi.org/10.31234/osf.io/ybn9h>
- Kadane, J. B. (1995). Prime time for Bayes. *Controlled Clinical Trials*, 16(5), 313-318. [https://doi.org/10.1016/0197-2456\(95\)00072-0](https://doi.org/10.1016/0197-2456(95)00072-0)

- Kennedy, P. E. (2002). More on Venn diagrams for regression. *Journal of Statistics Education*, 10(1). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910547>
- Klasson, K. T. (2019). *Two-way ANOVA for unbalanced data: The spreadsheet way* [Technical Report]. USDA, Agricultural Research Service, Southern Regional Research Center. <https://www.ars.usda.gov/ARSUserFiles/60540520/Two-wayANOVAspreadsheet.pdf>
- Kriegbaum, K., Becker, N., & Spinath, B. (2018). The relative importance of intelligence and motivation as predictors of school achievement: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 25, 120-148. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2018.10.001>
- Kriegbaum, K., Jansen, M., & Spinath, B. (2015). Motivation: A predictor of PISA's mathematical competence beyond intelligence and prior test achievement. *Learning and Individual Differences*, 43, 140-148. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.08.026>
- Kiliszek, D., & Kroszczyński, K. (2020). Performance of the precise point positioning method along with the development of GPS, GLONASS and Galileo systems. *Measurement*, 164, 108009. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108009>
- Krus, D. J., & Wilkinson, S. M. (1986). Demonstration of properties of a suppressor variable. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, 18(1), 21-24. <https://doi.org/10.3758/BF03200988>
- König, C., & van de Schoot, R. (2018). Bayesian statistics in educational research: A look at the current state of affairs. *Educational Review*, 70(4), 486-509. <https://doi.org/10.1080/00131911.2017.1350636>
- Kucuk, U., Eyuboglu, M., Kucuk, H. O., & Degirmencioglu, G. (2016). Importance of using proper post hoc test with ANOVA. *International journal of cardiology*, 209, 346. <https://doi.org/10.1016/j.ijcard.2015.11.061>
- Kuhn, W. (2003). Semantic reference systems. *International Journal of Geographical Information Science*, 17(5), 405-409. <https://doi.org/10.1080/1365881031000114116>
- Kuppermann, N., & Willits, N. (2000). In Response to "Statistical Models and Occam's Razor". *Academic Emergency Medicine*, 7(1), 100-103. <https://doi.org/10.1111/j.1553-2712.2000.tb01905.x>
- Langsrud, Ø. (2003). ANOVA for unbalanced data: Use Type II instead of Type III sums of squares. *Statistics and Computing*, 13(2), 163-167. <https://doi.org/10.1023/A:1023260610025>

- Larson, K. M., Bilich, A., & Axelrad, P. (2007). Improving the precision of high-rate GPS. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 112(B05422). <https://doi.org/10.1029/2006JB004367>
- Lee, Y., & Pawitan, Y. (2021). Popper's falsification and corroboration from the statistical perspectives. In Z. Parusniková, D. Merritt (Eds.) *Karl Popper's Science and Philosophy* (pp. 121-147). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67036-8_7
- Leite, W. L., Svinicki, M., & Shi, Y. (2010). Attempted validation of the scores of the VARK: Learning styles inventory with multitrait-multimethod confirmatory factor analysis models. *Educational and Psychological Measurement*, 70(2), 323-339. <https://doi.org/10.1177/0013164409344507>
- Lens, W., & Rand, P. (2000). Motivation and cognition: Their role in the development of giftedness. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (2nd ed., pp. 193-202). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-008043796-5/50014-0>
- Levene, H. (1960). Robust tests for equality of variances. In I. Olkin (Ed.), *Contributions to Probability and Statistics* (pp. 278-292). Stanford Univ. Press.
- Li, Y., Zhao, W., Wu, W., Lu, B., & Chen, Y. (2014). Thermal error modeling of the spindle based on multiple variables for the precision machine tool. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 72(9-12), 1415-1427. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5744-4>
- Lindsey, J. K. (1997). *Applying generalized linear models*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b98856>
- Ludlow, L. & Klein, K. (2014). Suppressor variables: The difference between 'is' versus 'acting as'. *Journal of Statistics Education*, 22(2). <https://doi.org/10.1080/10691898.2014.11889703>
- Marsman, M., & Wagenmakers, E. J. (2017). Bayesian benefits with JASP. *European Journal of Developmental Psychology*, 14(5), 545-555. <https://doi.org/10.1080/17405629.2016.1259614>
- Mayo, D. G., & Cox, D. R. (2006). Frequentist statistics as a theory of inductive inference. *Lecture Notes-Monograph Series*, 77-97. <https://doi.org/10.1214/074921706000000400>
- Moenikia, M., & Zahed-Babelan, A. (2010). A study of simple and multiple relations between mathematics attitude, academic motivation and intelligence quotient with mathematics

- achievement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1537-1542.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.231>
- Murphy, R. J., Gray, S. A., Straja, S. R., & Bogert, M. C. (2004). Student learning preferences and teaching implications. *Journal of Dental Education*, 68(8), 859-866.
<https://doi.org/10.1002/j.0022-0337.2004.68.8.tb03835.x>
- Nelson, J. B. (2016). A robust function to return the cumulative density of non-central F distributions in Microsoft Office Excel. *Psicológica*, 37(1), 61-83.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=16943586004>
- O'Brien, R. M. (2018). A consistent and general modified Venn diagram approach that provides insights into regression analysis. *Plos one*, 13(5), e0196740.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0196740>
- Pajić, D. (2020). *Primena tehnika vizualizacije u bazičnoj statistici*. Filozofski fakultet u Novom Sadu. <http://psihologija.ff.uns.ac.rs/viz/>
- Perezgonzalez, J. D. (2015). Fisher, Neyman-Pearson or NHST? A tutorial for teaching data testing. *Frontiers in psychology*, 223, 74-84. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00223>
- Pomerantz, J. R. (2017). Perceptual organization in information processing. In M. Kubovy, J. R. Pomerantz (Eds.) *Perceptual organization* (pp. 141-180). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315512372>
- Rahman, A., & Ahmar, A. (2017). Relationship between learning styles and learning achievement in mathematics based on genders. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(1), 74-77. <https://ssrn.com/abstract=2940942>
- Rakap, S. (2010). Impacts of learning styles and computer skills on adult students' learning online. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, 9(2), 108-115.
<https://www.learntechlib.org/p/55653/>
- Rautopuro, J., & Väisänen, P. (2003). "I did it my way...". The impact of learning styles and strategies on students' success in quantitative research methods in educational sciences. *Education-Line. Paper presented at the European Conference on Educational Research, University of Hamburg* (Vol. 17, p. 20).
<http://www.leeds.ac.uk/educol/documents/00003164.htm>

- Riesch, H. (2010). Simple or simplistic? Scientists' views on Occam's razor. *Theoria. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, 25(1), 75-90. <http://www.ehu.es/ojs/index.php/THEORIA/article/view/489/632>
- Ristić Ž. (2006). *O istraživanju, metodu i znanju* (drugo izdanje). Institut za pedagoška istraživanja.
- Schenker, N., & Gentleman, J. F. (2001). On judging the significance of differences by examining the overlap between confidence intervals. *The American Statistician*, 55(3), 182-186. <https://doi.org/10.1198/000313001317097960>
- Schouten, M., & Looren de Jong, H. (2007). Mind matters: The roots of reductionism. In M. Schouten & H. Looren de Jong (Eds.), *The matter of the mind: Philosophical essays on psychology, neuroscience, and reduction* (pp. 1-28). Blackwell Publishing Ltd.
- Sharpe, N. R. & Roberts, R. A. (1997). The relationship among sums of squares, correlation coefficients, and suppression. *The American Statistician*, 51(1), 46-48. <https://doi.org/10.1080/00031305.1997.10473587>
- Smith, C. E., & Cribbie, R. (2014). Factorial ANOVA with unbalanced data: A fresh look at the types of sums of squares. *Journal of Data Science*, 12(3), 385-403. [https://doi.org/10.6339/JDS.201407_12\(3\).0001](https://doi.org/10.6339/JDS.201407_12(3).0001)
- Soler, T., Han, J. Y., & Weston, N. D. (2012). Alternative transformation from Cartesian to geodetic coordinates by least squares for GPS georeferencing applications. *Computers & Geosciences*, 42, 100-109. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2011.10.026>
- Spinath, B., Spinath, F. M., Harlaar, N., & Plomin, R. (2006). Predicting school achievement from general cognitive ability, self-perceived ability, and intrinsic value. *Intelligence*, 34(4), 363-374. <https://doi.org/10.1016/j.intell.2005.11.004>
- St. Clair, R. N. (2000). Visual metaphor, cultural knowledge, and the new rhetoric. In: J. Reyhner, J. Martin, L. Lockard, & W. Sakiestewa Gilbert (Eds.), *Lean in Beauty: Indigenous Education for a New Century* (pp. 85-101). Northern Arizona University. <https://jan.ucc.nau.edu/~jar/LIB/LIB8.html>
- Stanton, J. M. (2001). Galton, Pearson, and the peas: A brief history of linear regression for statistics instructors. *Journal of Statistics Education*, 9(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2001.11910537>

- Steinmayr, R., & Spinath, B. (2009). The importance of motivation as a predictor of school achievement. *Learning and Individual Differences*, 19(1), 80-90. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.05.004>
- Tzelgov, J., & Henik, A. (1991). Suppression situations in psychological research: Definitions, implications, and applications. *Psychological Bulletin*, 109(3), 524. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.109.3.524>
- Van de Schoot, R., Kaplan, D., Denissen, J., Asendorpf, J. B., Neyer, F. J., & van Aken, M. A. (2014). A gentle introduction to Bayesian analysis: Applications to developmental research. *Child development*, 85(3), 842-860. <https://doi.org/10.1111/cdev.12169>
- Van Deventer, V. (2021). Shifting ontology in an era of acceleration and quantified humanity. *International Review of Theoretical Psychologies*, 1(1). 37-48. <https://doi.org/10.7146/irtp.v1i1.127076>
- Van Doorn, J., Van den Bergh, D., Böhm, U., Dablander, F., Derks, K., Draws, T., Etz, A., Evans, N. J., Gronau, Q. F., Haaf, J. M., Hinne, M., Kucharsk, S., Ly, A., Marsman, M., Matzke, D., Komarlu Narendra Gupta, A. R., Sarafoglou, A., Stefan, A., Voelkel, J. G., & Wagenmakers, E. J. (2021). The JASP guidelines for conducting and reporting a Bayesian analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*, 28(3), 813-826. <https://doi.org/10.3758/s13423-020-01798-5>
- Venn, J. (1880). I. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(59), 1-18. <https://doi.org/10.1080/14786448008626877>
- Wasserstein, R. L., Schirm, A. L., & Lazar, N. A. (2019). Moving to a World Beyond “ $p < 0.05$ ”. *The American Statistician*, 73(S1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/00031305.2019.1583913>
- Wears, R. L., & Lewis, R. J. (1999). Statistical models and Occam's razor. *Academic Emergency Medicine*, 6(2), 93-94. <https://doi.org/10.1111/j.1553-2712.1999.tb01043.x>
- Weber, H. S., Lu, L., Shi, J., & Spinath, F. M. (2013). The roles of cognitive and motivational predictors in explaining school achievement in elementary school. *Learning and individual differences*, 25, 85-92. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.03.008>
- Westfall, P. H. (1997). Multiple testing of general contrasts using logical constraints and correlations. *Journal of the American Statistical Association*, 92(437), 299-306. <https://doi.org/10.1080/01621459.1997.10473627>

- Westfall, P. H., Johnson, W. O., & Utts, J. M. (1997). A Bayesian perspective on the Bonferroni adjustment. *Biometrika*, 84(2), 419-427. <https://doi.org/10.1093/biomet/84.2.419>
- Wilkinson, M. (2013). Testing the null hypothesis: The forgotten legacy of Karl Popper? *Journal of Sports Sciences*, 31(9), 919-920. <https://doi.org/10.1080/02640414.2012.753636>

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FILOZOFSKI FAKULTET NOVI SAD
21000 Novi Sad
Dr Zorana Đinđića 2
www.ff.uns.ac.rs

Elektronsko izdanje

<https://digitalna.ff.uns.ac.rs/sadrzaj/2023/978-86-6065-734-5>

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

159.9:311(075.8)

ЈЕВРЕМОВ, Тања, 1972-

Primena tehnika vizualizacije u naprednoj statistici [Elektronski izvor] / Tanja Jevremov. - Novi Sad : Filozofski fakultet, 2023

Dostupno i na: <https://digitalna.ff.uns.ac.rs/sadrzaj/2023/978-86-6065-734-5>. - Opis zasnovan na stanju na dan 10.7.2023. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-6065-734-5

a) Психологија - Технике визуализације - Статистика

COBISS.SR-ID 120408329